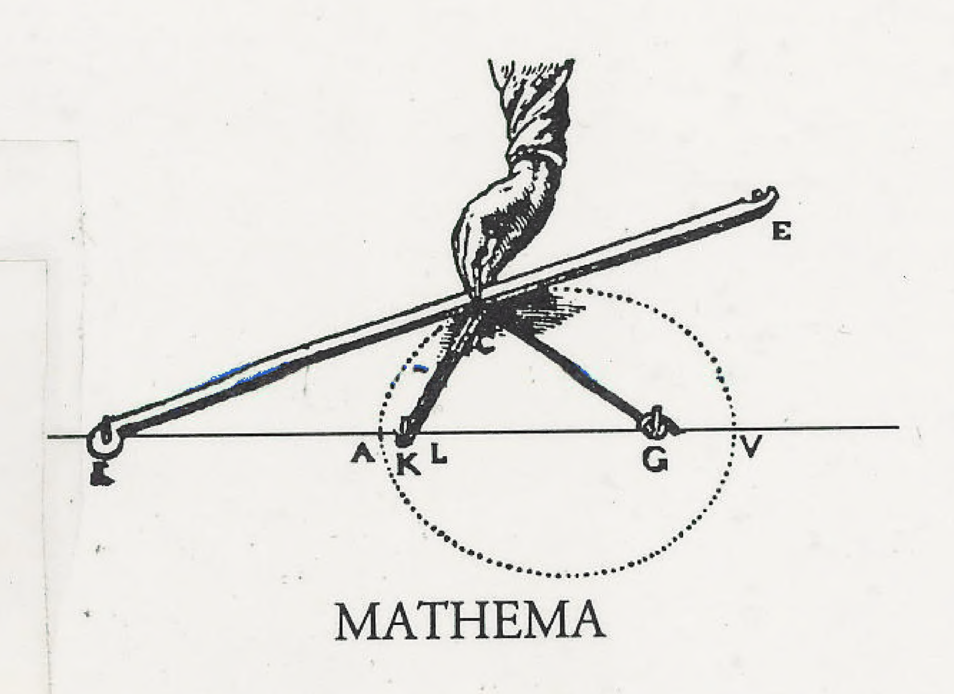
David Hilbert

Fundamentos de las Matemáticas



MATHEMA

Indice

David Hilbert

Fundamentos de las Matemáticas

MATHEMA

Colección dirigida por:

Carlos Alvarez - Rafael Martínez
Santiago Ramírez - Carlos Torres

David Hilbert

Fundamentos de las Matemáticas

Selección e introducción de

Carlos Alvarez y Luis Felipe Segura

Traducción directa del alemán y notas de

Luis Felipe Segura

Primera edición en español: México 1993.

Impresión Tipografia Fenian S.A. de C.V.



ISBN 968-36-3275-0
ISBN 968-36-1887-1 (Colección MATHEMA)

Fundamentos de las Matemáticas de David Hilbert.
Se terminó de imprimir el día 16 de octubre de
1993 en los talleres de P7 ediciones para
Tipografía Fenian S.A. de C.V. Se
utilizaron los tipos Garamond
18/24, 12/14, 10/12 y 8/9.
El tiraje constó de
mil ejemplares.

Colección MATHEMA

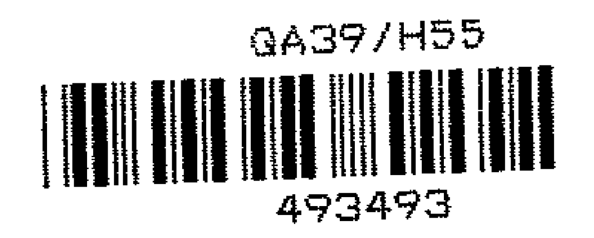
Títulos publicados:

Las paradojas
del
Infinito

Bernard Bolzano

Método
Axiomático
y Formalismo

Jean Cavaillès



Volúmenes
en preparación:

Curso
de Análisis

Augustin-Louis Cauchy

El juego de las esferas

Nicolás de Cusa

Obras
Matemáticas

Blaise Pascal

Geometría
Descriptiva

Gaspar Monge

Los textos que conforman la presente antología abarcan un período de más de 30 años (1899-1930) en las investigaciones de Hilbert acerca de los fundamentos de las matemáticas. En ellos podemos observar el desarrollo de sus ideas en torno a esta problemática: la axiomatización como el método propio de las matemáticas, la justificación del infinito y la necesidad, en vista de la aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos y las subsecuentes disputas en torno a la validez de la aritmética transfinita y la lógica misma, de darles un fundamento seguro y definitivo con la *metamatemática* o teoría de la demostración. En este proyecto, tanto lógico como matemático, la reflexión filosófica desempeña un papel importante y así vemos como la filosofía de Kant constituye un pilar tan importante como el cálculo lógico de Frege y Rusell. Este intento, conocido como el programa de Hilbert, es el origen del formalismo en la filosofía de las matemáticas y constituye un punto de referencia ineludible para el estudio histórico de estos problemas.



Introducción

No es posible comprender el interés de Hilbert a lo largo de casi 30 años en los problemas de los fundamentos de las matemáticas si no se toma en cuenta el contexto teórico e histórico en el que tal problemática surge y en el cual los textos que aquí presentamos pretenden influir.

Hacia 1895 ya eran conocidas algunas de las inconsistencias vinculadas directamente con la naciente teoría de los conjuntos. Cantor, Zermelo y Hilbert tenían conocimiento de la existencia de estas contradicciones. En 1899, Cantor intenta una clasificación de las "multiplicidades" o conjuntos en dos clases distintas. La primera de ellas es la clase de las totalidades *consistentes* que estaría formada por todas aquellas multiplicidades para las cuales la "existencia simultánea" de todos sus elementos no lleva a ninguna contradicción. La clase de las multiplicidades *inconsistentes* sería en cambio aquella formada por totalidades en relación a las cuales no sería posible considerar la existencia simultánea de todos sus elementos sin llegar a una contradicción. Tal sería el caso de la clase de todos los números ordinales, o la clase de todos los números cardinales.

Sería un error, sin embargo, considerar que la irrupción de los métodos axiomáticos fue el efecto directo de un proyecto inspirado en la idea de salir al paso a estas contradicciones; recordemos simplemente que no es la teoría de los conjuntos la primera rama de las matemáticas que fue axiomatizada. Es importante tener presente que el antecedente más importante a los textos que aquí presentamos, *die Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, data de 1895, y tal vez este texto pueda ser considerado como el origen del método axiomático contemporáneo en matemáticas. Si recordamos brevemente el espíritu que anima a esta obra, Hilbert intenta una clasificación de los distintos axiomas sobre los cuales se basa la geometría del plano en cuatro diferentes grupos; con los cuales

se pretendía el "análisis lógico de nuestra percepción del espacio"[1]. El punto importante para la dificultad que nos ocupa no radica en establecer si los axiomas que constituyen a estos cuatro grupos eran ya conocidos por Euclides o por alguna tradición geométrica posterior. La cuestión central es la relación que guardan estos axiomas con el resto de las proposiciones geométricas. Los axiomas no son considerados como proposiciones verdaderas, evidentes y que no requieren demostración; un axioma no es tal sino en combinación con los otros axiomas; su carácter deriva del hecho de que sea *independiente* de, y *consistente* con, los demás. Es decir, a partir de los axiomas no deberá concluirse una contradicción, y ningún axioma podrá derivarse de los restantes.

Con esta idea en mente, Hilbert sostiene que los axiomas establecen las condiciones que definen a los *objetos geométricos* involucrados en ellos. Es decir, si los axiomas satisfacen la condición de ser no contradictorios entre sí, entonces resultarán *verdaderos* y *existentes* los objetos definidos a través de ellos.

Es en este sentido que deben entenderse los axiomas de la geometría; ellos establecen las relaciones que prevalecen entre los objetos definidos por ellos y que llamamos *puntos, líneas, planos, etc.* Es decir, no hay necesidad de establecer definición alguna acerca de lo que es cada uno de estos objetos, esta definición está dada implícitamente por los axiomas. Con este doble papel desempeñado por los axiomas y el abandono de la idea de que se trata de verdades que no requieren demostración, podemos sostener que en su sentido moderno, el método axiomático en las matemáticas nace precisamente con esta obra de Hilbert.

Esta es la idea central que domina en el texto que inicia nuestra selección, "Acerca del concepto de número" [Über den Zahlbegriff]. Hilbert compara aquí a la geometría y a la aritmética desde el punto de vista de su método de investigación. Mientras que en ésta los diferentes sistemas numéricos (enteros, racionales, reales y complejos) se introducen por extensiones sucesivas del sistema de los naturales para garantizar la generalidad de las operaciones (diferencia, división y extracción de raíces), es decir, *genéticamente*, en aquella el procedimiento consiste en suponer la existencia de ciertos conjuntos de objetos y postular ciertas relaciones entre ellos, esto es, el procedimiento es *axiomático*. A pesar del gran valor

[1] D. Hilbert *die grundlagen der Geometrie*, Introducción.

didáctico y herurístico del primer método, Hilbert considera que el método axiomático resulta el más adecuado para una investigación sobre los fundamentos de la teoría de los números. Se presentan 18 axiomas para la teoría de los números reales, divididos en 4 grupos (axiomas numéricos, de orden, de conexión, de continuidad), y se investigan las relaciones de dependencia lógica entre ellos. Hilbert reconoce así en la demostración de consistencia la garantía de la existencia, como una totalidad acabada, del conjunto de los números reales.

En el período que va de 1900 a 1917, Hilbert había reconocido la necesidad de una extensión del método axiomático a toda la matemática y a toda la ciencia. En 1904, por ejemplo, Hilbert presenta un esquema de prueba de la consistencia de la aritmética que, aunque desafortunado, encierra ya una estrategia de demostración que se convertiría en una forma canónica de establecer resultados en la metamatemática, es decir, el uso de la inducción sobre fórmulas para mostrar que cierta propiedad es hereditaria. Hilbert expone asimismo en este tiempo su idea, esencial para la realización de esta estrategia en las matemáticas, de que las consideraciones globales acerca de éstas pueden partir de la concepción de las mismas como una simple colección de fórmulas, que su consistencia debe demostrarse directamente suponiendo tan sólo nociones *elementales* (la inducción como máximo) y, además, que esta tarea requiere de la fundamentación *simultánea* de la lógica y la aritmética (por lo que el logicismo incurre en un error de principio). Otras ideas que Hilbert formula por primera ocasión en este lapso son la relativa a la existencia de objetos extralógicos y a la equivalencia entre verdad matemática y consistencia.

En 1917, Hilbert escribe nuevamente sobre estos temas. Su artículo "El pensamiento axiomático" [*Axiomatisches Denken*] representa un punto de transición en el planteamiento hilbertiano. Se desarrolla aquí una teoría del método axiomático como un instrumento de ordenación rigurosa esencial a la ciencia e indicador de su grado de desarrollo. Pero ahora la exigencia de la consistencia de los axiomas de cada una de las disciplinas lo lleva a plantearse una investigación sobre el concepto mismo de demostración. En esta tarea Hilbert ve un paralelo con la teoría de los aparatos en la física y con la crítica de la razón en la filosofía.

Los escritos de 1922 "La nueva fundamentación de las matemáticas [*Neubegründung der Mathematik.*] y de 1923 "Los fundamentos lógicos de las matemáticas" [*Die logischen Grundlagen der Mathematik*] constituyen un

punto de definición importante en el pensamiento de Hilbert. Se habla en ellos, por primera ocasión, de la *metamatemática* como una nueva rama de las matemáticas con una problemática específica. Con ello Hilbert considera tres partes esenciales de las matemáticas:

a) Las matemáticas reales que conforman el cuerpo de resultados y procedimientos que históricamente se asocia con esta disciplina, esto es, las matemáticas con sus principios deductivos finitos y transfinitos (*v.gr.* la ley del tercero excluido o el axioma de elección) a los que se trata de dar un fundamento definitivo.

b) Al conjunto de signos con los que se formalizan (representan) proposiciones, ideas y argumentaciones de la matemática real, pero que se manejan como si carecieran de todo significado, por medio de reglas de transformación puramente sintácticas.

c) Una teoría de la demostración [*Beweistheorie*] en la que se hace uso de inferencias y procedimientos concretos, esto es, de contenido, de carácter estrictamente finitista, y cuyo fin sería el establecimiento de resultados acerca de b) (y así, indirectamente, acerca de a), particularmente los relativos a la consistencia e independencia de los axiomas.

Hilbert formula en el primero de estos artículos lo que después habría de considerarse, erróneamente, como la idea básica del *formalismo*, a saber, que los objetos de la teoría de números son los signos mismos. Sin embargo, en el segundo escrito, Hilbert sostiene que no puede prescindirse nunca por completo de las consideraciones intuitivas y de contenido; lo que se hace es ubicarlas en un nivel superior. De acuerdo con esto, el desarrollo de las matemáticas tendría que darse por dos vías: demostrando que nuevas fórmulas son deducibles a partir de los axiomas por medio de las inferencias formales aceptadas, y añadiendo nuevos axiomas junto con la prueba de consistencia correspondiente. Hilbert acepta en esta época parcialmente la crítica de Brouwer al significado de ciertas proposiciones e inferencias que trascienden la esfera de lo finito, pero rechaza, sin embargo, las consecuencias que aquél deriva a partir de ello. Para Hilbert, lo que se requiere es no una renuncia a ninguna parte de las matemáticas, sino un examen de aquellos modos de inferencia que involucren lo transfinito, así como una determinación axiomática garantizada por una prueba de consistencia.

Las ideas de Hilbert acerca de los fundamentos de las matemáticas alcanzan su plena madurez en su ensayo "Acerca del infinito" [*Über das Unendliche*]. El artículo está escrito en un tono brillante y conciliador (a

diferencia de la actitud polémica del escrito de 1923). El texto está dividido en dos partes; en la primera, Hilbert presenta una versión mucho más elaborada del método axiomático y de la metamatemática o teoría de la demostración. En la segunda, Hilbert presenta un bosquejo de prueba de la consistencia de la hipótesis del continuo. Una de las ideas que Hilbert introduce aquí es la distinción entre proposiciones finitarias (reales) y proposiciones ideales; en esta distinción Hilbert cree ver la clave no sólo para la comprensión histórica del surgimiento de distintos sistemas numéricos, sino igualmente un procedimiento legítimo de simplificación y generalización y, por supuesto, la clave para una solución del problema de dar un fundamento finito a las argumentaciones transfinitas. La única condición que la aplicación del método de los elementos ideales plantea es el de una *prueba de consistencia* de los postulados, pero ésta requiere a su vez que la teoría se trate como algo concreto, es decir, como una colección de fórmulas y asociaciones sintácticas sin significado. En el caso crítico de la teoría de los números y la teoría de conjuntos, se hace necesaria una formalización simultánea de éstas y la lógica. Se tendría así una garantía tanto de aquéllas como de la inocuidad de las leyes de la lógica aristotélica. Hilbert concluye de todo esto el carácter absolutamente fundamental de la teoría de la demostración.

"La fundamentación de la teoría elemental de números [*Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*] es el último de los escritos no sistemáticos de Hilbert sobre el tema de los fundamentos de las matemáticas. En este artículo Hilbert completa la transición de la consideración de objetos intuitiva de la matemática real a la consideración de fórmulas como materia de reflexión. Hilbert pretende ofrecer aquí una justificación filosófica del finitismo y del procedimiento axiomático de los elementos ideales. El *finitismo* se encuentra íntimamente relacionado con lo *a priori*, esto es, con las condiciones de posibilidad de la razón en su manifestación propiamente matemática: hay algo que nos es dado de antemano en la representación, ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata y anteriores a todos pensamiento. De ello se concluye, en primer término, la imposibilidad del logicismo. Lo *a priori* en Kant y en Hilbert no son, sin embargo, idénticos. Hay principios que Kant considera *a priori* y que no son tales (la totalidad de los hechos fundamentales de la geometría, las proposiciones elementales del espacio y la materia, por ejemplo), sino hechos empíricos; y también

hay otros que han sido tenidos como tales y que no es posible obtener en el marco de un enfoque estrictamente finitista (*v.gr.* el principio del tercero excluido). Un antecedente histórico del finitismo se encuentra en Kronecker, quien, sin embargo, habría cometido el error de declarar ilícitas las argumentaciones transfinitas (absolutamente imprescindibles en análisis, según Hilbert y que constituyen la razón de ser de la aritmética cantoriana) y decretar prohibiciones al respecto. El problema es entonces el de justificar el infinito a partir de lo finito. La posibilidad misma del conocimiento depende, de acuerdo con Hilbert, de la existencia de un consenso total en relación a ciertos principios, y el marco más elemental de tal acuerdo es la teoría de números. Es imprescindible, por lo tanto, alcanzar una corrección absoluta en lo que a ésta se refiere y eliminar definitivamente cualquier duda respecto a sus fundamentos. Este sería el logro de la teoría hilbertiana de la demostración. Hilbert formula, finalmente, su idea de que la solución por él propuesta es esencialmente la única plausible: no ha habido ninguna otra teoría que permita obtener los mismos resultados y no es concebible ninguna otra que lo logre, puesto que, en realidad, lo que hace la teoría de la demostración no es sino representar [nachbilden] la actividad última de nuestro entendimiento y elaborar un registro de reglas según las cuales procede, de hecho, nuestro pensamiento.

Carlos Alvarez
Luis Felipe Segura

Nota

Los textos que componen nuestra antología tienen el siguiente origen:

Cap. I "Acerca del concepto de número" [Über den Zahlbegriff] fue publicado originalmente en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8, 1900, pp. 180-194. El artículo está fechado 12 de octubre de 1899 en Göttingen y reimpreso como Anexo VI de la 3ª (1909) a la 7ª (1930) edición de los *Fundamentos de la geometría* (1899) (FG).

Cap. II "El pensamiento axiomático" [Axiomatisches Denken] es el texto de una conferencia sustentada por Hilbert ante la Sociedad Matemática Suiza el 11 de septiembre de 1917 en Zürich. Se publicó al año siguiente en los *Mathematische Annalen* 78, pp. 405-415 reimprimiendose en el vol. 3 de los *Gesammelte Abhandlungen*, Springer Verlag, Berlín, 1935 (GA), pp. 146-156.

Cap. III "La nueva fundamentación de las matemáticas" [Neubegründung der Mathematik] es el texto de la conferencia presentada a Sociedad Matemática de Copenhague y al Seminario de Matemáticas de la Universidad de Hamburgo a principios de 1922 y en verano de ese año respectivamente. Se publicó con el subtítulo "Primera Comunicación" [Erste Mitteilung] en los *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität I* (1922), pp.157-177 y en los GA, exactamente en las mismas páginas.

Cap. IV "Los fundamentos lógicos de las matemáticas" [Die logischen Grundlagen der Mathematik] es el texto de una conferencia dictada por Hilbert en la Sociedad Alemana de Investigadores de las Ciencias Naturales en septiembre de 1922. Fue publicada en los *Mathematische Annalen* 88 (1923), pp. 151-165 y apareció como reimpresión en los GA, pp. 178-191.

Cap. V "Acerca del infinito" [über das Unendliche] es el texto (presumiblemente ampliado) de una conferencia dedicada a la memoria de Weierstraß en la Sociedad Matemática de Vestfalia el 4 de junio de 1925 en Münster. Se publicó en los *Mathematische Annalen* 95 (1926), pp. 161-190 y fue reeditado al año siguiente en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 36, pp. 201-215 y en forma abreviada como Apéndice a la 7ª ed. de los FG.

Cap. VI "La fundamentación de la teoría elemental de números" [Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre] es el texto de una conferencia sostenida ante la Sociedad Filosófica de Hamburgo en diciembre de 1930. Fue publicado en los *Mathematische Annalen* 104 (1931), pp. 485-494. La parte central de este artículo fue reeditada bajo el mismo título en los GA, pp. 192-195.

Para la preparación de la presente edición hemos contado con la valiosa y generosa colaboración de los profesores Rodolfo San Agustín, Carlos Torres del Departamento de Matemáticas y Mónica Clapp del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Acerca del concepto de número

Cuando estudiamos y comparamos los numerosos trabajos publicados acerca de los principios de la aritmética y los axiomas de la geometría, nos percatamos no sólo de la existencia de múltiples analogías y conexiones entre estas dos materias, sino asimismo de una importante diferencia en lo que se refiere al método de investigación en ellas.

Recordemos, en primer lugar, el modo en el que se introduce el concepto de número.

Tomando como punto de partida el concepto de número 1, se piensa normalmente que los demás números enteros positivos 2, 3, 4, ... , así como las leyes que rigen sus operaciones, surgen gracias al proceso de contar. Se pasa después, debido a la exigencia de generalidad de la sustracción, al número negativo. Luego puede definirse el número fraccionario, por ejemplo, como un par de números — se tiene entonces que toda función lineal posee una raíz— y finalmente a un número real como una cortadura o como una sucesión fundamental. De este modo se logra ver que cualquier función racional indefinida y, en general, cualquier función continua indefinida, tiene una raíz. Llamaremos *genético* a este método de introducción del concepto de número porque introduce el concepto mucho más general de número real por medio de extensiones sucesivas del concepto más sencillo de número.

En el caso de la construcción de la geometría, el procedimiento es fundamentalmente distinto. Lo común en ella es comenzar con la suposición de la existencia de una totalidad de elementos. Es decir, suponemos desde un inicio la existencia de tres sistemas de objetos: los puntos, las rectas y los planos. Relacionamos luego esos elementos entre

sí, según el modelo euclidiano, por medio de los axiomas de conexión, de orden, de congruencia y de continuidad[1].

El problema que entonces se nos plantea es el de demostrar la consistencia y completud de estos axiomas. En otras palabras, tenemos que probar que la aplicación de esos axiomas no puede nunca conducirnos a contradicciones y, además, que el sistema de los axiomas resulta suficiente para demostrar todos los teoremas de la geometría. Llamaremos *método axiomático* a este procedimiento de investigación.

La cuestión que ahora queremos plantear es la de saber si realmente el método genético resulta el más adecuado para el estudio del concepto de número, mientras que el método axiomático es el más idóneo para los fundamentos de la geometría. Igualmente resulta de gran interés comparar ambos procedimientos e investigar cuál es el más apropiado para una investigación lógica de los fundamentos de la mecánica o de alguna otra disciplina física.

Mi opinión es esta: *a pesar del gran valor pedagógico y heurístico que el método genético pueda tener, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento.*

En la teoría de los números, el método axiomático adquiere la siguiente forma.

Pensemos en un cierto sistema de objetos a los que llamaremos números y que denotaremos con las letras $a, b, c, \ldots$. Supongamos, además, que estos números se encuentran en ciertas relaciones recíprocas cuya descripción precisa es expresada por los siguientes axiomas:

I. *AXIOMAS DE CONEXION*

I. 1 A partir de dos números a y b podemos obtener por "adición" otro número c. Simbólicamente,

$$a + b = c \quad \text{o bien} \quad c = a + b$$

I. 2 Dados dos números a y b cualesquiera, existe un único número x y existe un único número y tales que

$$a + x = b \quad \text{y} \quad y + a = b$$

---

[1] *Cfr.* D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* [Fundamentos de la Geometría], Leipzig, 1899.

I. 3 Existe un número definido 0 con la propiedad de que, para todo número a,

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad 0 + a = a$$

I. 4 Dados dos números a y b cualesquiera, podemos obtener por "multiplicación" otro número c. En símbolos

$$a\,b = c \quad \text{o bien} \quad c = a\,b\,.$$

I. 5 Si a y b son números y a es distinto de 0, existen un único número x y un único número y tales que

$$a\,x = b \quad \text{y} \quad y\,a = b$$

I. 6 Existe un número definido 1 con la propiedad de que, para todo número a,

$$a \cdot 1 = a \quad \text{y} \quad 1 \cdot a = a\,.$$

II. *AXIOMAS PARA LAS OPERACIONES*

Las siguientes fórmulas son válidas para cualesquiera números a, b y c

II. 1 $a + (b + c) = (a + b) + c$

II. 2 $a + b = b + a$

II. 3 $a(bc) = (ab)c$

II. 4 $a(b + c) = ab + ac$

II. 5 $(a + b)c = ac + bc$

II. 6 $ab = ba$

III. *AXIOMAS DEL ORDEN*

III.1 Si a y b son dos números distintos cualesquiera, uno de ellos (por ejemplo, a) es mayor (>) que el otro; este último es menor que el primero. En símbolos

$$a > b \quad \text{y} \quad b < a$$

III. 2 Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

III. 3 Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $c + a > c + b$

III. 4 Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a\,c > c\,b$ y $c\,a > c\,b$.

IV. *AXIOMAS DE CONTINUIDAD*

IV. 1 (Axioma de Arquímedes) Sean a y b dos números cualesquiera, $a > 0$ y $b > 0$. Sumando a consecutivamente, puede obtenerse una suma con la propiedad de que

$$a + a + \ldots + a > b$$

IV. 2 (Axioma de completud) Si al sistema de los números se añade otro sistema de objetos, entonces en el nuevo sistema no pueden ser válidos los axiomas I, II, III, y IV. 1. En otras palabras, los números conforman un sistema de objetos que tiene la propiedad de hacer imposible una extensión [propia] del mismo conservando la validez de la totalidad de sus axiomas.

Algunos de los axiomas I. 1-6, II. 1-6, III. 1-4 y IV. 1-2 pueden obtenerse a partir de los demás. Es decir, nuestros axiomas plantean el problema de su independencia lógica. Esta tarea nos permite reconocer varios hechos novedosos y de gran utilidad en la investigación de los principios de la aritmética. Tomemos como ejemplo los siguientes.

La existencia del número 0 (axioma I.3) es una consecuencia de los axiomas I. 1, I. 2 y II. 1, por lo que tal principio depende esencialmente de la ley asociativa para la adición.

La existencia del número 1 (axioma I.6) se obtiene a partir de los axiomas I. 4, I. 5 y II. 3, por lo que se encuentra íntimamente relacionada con la ley asociativa para la multiplicación.

Por otra parte, la ley conmutativa para la adición (axioma II. 2) resulta de los axiomas I, II. 1, II. 4 y II. 5, por lo que podemos verla como una consecuencia de la ley asociativa para la adición y las leyes distributivas.

Prueba:

Tenemos que

$$(a+b)(1+1)=(a+b)1+(a+b)1=a+b+a+b$$

$$=a(1+1)+b(1+1)=a+a+b+b,$$

por lo que

$$a+b+a+b=a+a+b+b$$

y, por lo tanto, según I. 2,

$$b + a = a + b .$$

La ley conmutativa para la multiplicación (axioma II. 6) se obtiene de los axiomas I, II. 1-5, III y IV. 1, pero no se puede llegar a ella a partir de los axiomas I, II. 1-5 y III. Es decir, el principio se obtiene a partir del resto de los axiomas si y solamente si se añade también el axioma de Arquímedes (axioma IV.1). Este resultado adquiere especial importancia en lo que se refiere a los fundamentos de la geometría[2].

Los axiomas IV. 1 y IV. 2 son independientes entre sí y no nos informan nada acerca del concepto de convergencia, ni acerca de la existencia de un límite. Sin embargo, a partir de ellos puede deducirse el teorema de Bolzano sobre la existencia de un punto de acumulación. Por lo demás, es clara la coincidencia de nuestro sistema numérico con el sistema usual de los números reales.

La demostración de la consistencia del sistema de axiomas no requiere sino de una modificación apropiada de los métodos de deducción usuales. En esta prueba me parece vislumbrar igualmente la demostración de la existencia del agregado [Inbegriff] de los números reales, o, para servirnos de la terminología de G. Cantor, la demostración de que el sistema de los números reales constituye un conjunto consistente (acabado)[3].

Todas las dudas y objeciones que se han planteado en relación a la existencia del agregado de los números reales y, en general, en relación a la existencia de conjuntos infinitos aparecen como algo injustificado una vez que hemos adoptado el enfoque que acabo de describir. De acuerdo con lo dicho, por conjunto de los números reales no tenemos que entender la totalidad de las leyes posibles según las cuales pueden avanzar los elementos de una sucesión fundamental, sino más bien, como acabamos de decir, un sistema de objetos cuyas relaciones se encuentran determinadas por el sistema *finito* y *cerrado* de los axiomas I-IV, y en relación al cual ninguna afirmación será válida si no puede deducirse a

---

[2] *Cfr.* D. Hilbert, *op. cit.*, Cap VI.

[3] Hilbert utiliza aquí siguiendo a Cantor el término "consistent" para referirse a conjuntos en general, mismo que no ha de confundirse con "widerspruchsfrei"(literalmente: libre de contradicción), que es usual traducir como "consistente"para referirse a conjuntos de enunciados. Cantor (carta a Dedekind, 18.6.99) distingue entre multiplicidades consistentes e inconsistentes. Unicamente las primeras darían lugar a conjuntos. [N. de T.]

partir de esos axiomas por medio de un número finito de inferencias lógicas.

Si procedemos de manera análoga para obtener una demostración de la existencia del agregado de todas las potencias (o el de todos los *alephs* cantorianos) es seguro que no tendremos éxito: el agregado de todas las potencias no existe; es decir, el sistema de todas las potencias es —en la terminología de Cantor— un conjunto inconsistente (inacabado)[4].

[4] Ver nota anterior. [N. de T.]

El pensamiento axiomático

Una sociedad particular sólo puede desarrollarse saludablemente cuando también lo hacen los pueblos que le son vecinos. De manera análoga, el bienestar y el interés de los estados demandan no sólo el mantenimiento de un orden interno, sino también la existencia de un orden general en las relaciones entre ellos. Lo mismo ocurre en la ciencia.

Haciéndose cargo de esta circunstancia, los más importantes pensadores en las matemáticas han mostrado un constante interés por las leyes y, en general, por el orden que priva en las ciencias vecinas, cultivando en beneficio de nuestra disciplina sus relaciones con amplios e importantes ámbitos científicos de la física y la teoría del conocimiento.

En mi opinión, la mejor manera de aclarar la naturaleza y el fundamento de estas fructíferas relaciones consiste en exponer el método general de investigación que parece imponerse cada vez más en las matemáticas modernas, el *método axiomático.*

Si consideramos en conjunto los hechos que conforman una cierta esfera del conocimiento más o menos comprensiva, nos percataremos de inmediato de que la totalidad de los mismos es susceptible de un orden. La ordenación se lleva a cabo recurriendo a una ciera *trama de conceptos* relacionados entre sí, de tal manera que a cada objeto y a cada hecho del campo de conocimiento de que se trate les corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo. La trama de conceptos no es otra cosa que la *teoría* de esa esfera del saber.

Esta es precisamente la manera en la que se ordenan en la geometría los hechos geométricos, en la que se ordenan los hechos aritméticos en una teoría de los números, y los hechos estáticos, mecánicos y electrodinámicos en una teoría de la estática, en una teoría de la mecánica y

en una de la electrodinámica respectivamente. Y es así como una teoría de los gases impone un orden a los hechos de la física de los gases. Lo mismo ocurre en las esferas del conocimiento de la termodinámica, de la geometría óptica, de la teoría elemental de la radiación, de la conducción del calor, o en el cálculo de probabilidad y en la teoría de conjuntos. Igualmente en muchos otros campos del conocimiento matemático puro, como en la teoría de las superficies, la teoría de las ecuaciones de Galois o la teoría de los números primos, y del conocimiento no matemático como en ciertas ramas de la psicofísica o de la teoría monetaria.

Si observamos de cerca una teoría determinada, reconoceremos en ella un reducido número de proposiciones distinguidas que sirven de fundamento para la construcción del entramado de conceptos que hemos mencionado. A partir de esas proposiciones y con base en principios lógicos, podemos obtener en su totalidad el edificio conceptual que subyace a la disciplina en cuestión.

Es así como en la geometría basta el principio de linearidad de la ecuación del plano y el de la transformación ortogonal de las coordenadas para permitirnos obtener, haciendo uso exclusivo de recursos analíticos, la totalidad de la disciplina que conocemos como geometría euclidiana del espacio. En la teoría de los números bastarían, por ejemplo, las leyes para las operaciones y las reglas para los números enteros. En la estática, este papel central es asumido por el teorema del paralelogramo de fuerzas, mientras que en la mecánica podría representarlo la ecuación diferencial del movimiento de Lagrange, y en la electrodinámica, las ecuaciones de Maxwell, con la exigencia adicional de la rigidez y la carga del electrón. La termodinámica puede construirse enteramente a partir del concepto de función de energía y la definición de temperatura y presión como derivadas de las variables de entropía y de volumen. En la teoría elemental de la radiación, basta el principio de Kirchhoff acerca de las relaciones entre emisión y absorción, mientras que el cálculo de probabilidades puede basarse enteramente en el principio de desviación de Gauss. La teoría de los gases en la ley de la entropía, como el logaritmo negativo de la probabilidad del estado. La teoría de las superficies se basa en la representación del elemento de arco por medio de la forma diferencial cuadrática; la teoría de las ecuaciones en el teorema de la existencia de raíces; la teoría de los números primos en la ley de la realidad y frecuencia de los ceros de la función riemanniana $\zeta(t)$ del teorema fundamental.

En un primer nivel podemos considerar a todos estos principios básicos como *axiomas de las esferas particulares del conocimiento.* El desarrollo y progreso de cada una de éstas consistiría entonces simplemente en la extensión lógica del aparato conceptual del que ya disponemos. Este es el enfoque dominante en las matemáticas puras. Es precisamente a los métodos de trabajo e investigación que de él se derivan a los que debemos el enorme desarrollo de la geometría, de la aritmética, de la teoría de funciones y de la totalidad del análisis.

Con todo ello, el problema de la fundamentación de los campos particulares del conocimiento encontraba al mismo tiempo una solución, si bien de carácter provisional. En efecto, poco a poco se hizo patente en cada una de las disciplinas que hemos mencionado la necesidad de dar también un fundamento a aquellos principios tenidos hasta entonces como básicos, como axiomas. Se ofreció entonces una serie de "demostraciones" del carácter lineal de la ecuación del plano y de la ortogonalidad de una transformación que expresara un movimiento. Se "probaron" las leyes de las operaciones aritméticas, el paralelogramo de las fuerzas, las ecuaciones del movimiento de Lagrange, lo mismo que la ley de la emisión y la absorción de Kirchhoff, la ley de la entropía y el principio de la existencia de las raíces de una igualdad.

Pero el examen crítico de estas "demostraciones" puso de manifiesto que, en realidad, no se trataba efectivamente de pruebas. Lo que con ellas se logra, es fundamentalmente una reducción a otras proposiciones, localizadas en un plano más profundo, a las que debemos considerar ahora como axiomas, esto es, como los axiomas que reemplazan a los anteriores. Esta es la manera en la que se obtienen los llamados *axiomas* de la geometría, de la aritmética, de la estática y la mecánica, de la teoría de la radiación y los de la termodinámica. Estos axiomas representan un estrato más profundo de principios axiomáticos que los axiomas mencionados en relación a cada una de esas esferas del conocimiento. El procedimiento del método axiomático, tal y como aquí se hace evidente, equivale a una *ubicación más profunda de los fundamentos* de las ciencias particulares. Como ocurre en el caso de cualquier construcción, esto resulta necesario cuando se quiere seguridad al pasar a niveles superiores.

Ahora bien, si la teoría de una esfera particular del conocimiento, esto es, el aparato conceptual que le es propio, ha de cumplir sus objetivos de orientación y ordenamiento, debe satisfacer ante todo dos exigencias fundamentales. Debe, *en primer lugar*, proporcionarnos una visión de

conjunto de la *dependencia* (o *independencia)* de los enunciados de la teoría; y debe también, *en segundo lugar*, ofrecernos una garantía de la *consistencia* de todos los enunciados de la teoría. Son estos los dos principios que debemos tomar como criterio en el examen de los axiomas de una teoría.

Ocupémonos, en primer término, de la cuestión de la dependencia (o independencia) de los axiomas.

El ejemplo clásico de una prueba de independencia de un principio axiomático nos lo ofrece el *axioma de las paralelas* en la geometría. En realidad, el problema de si el enunciado de las paralelas se encuentra condicionado por los otros axiomas es resuelto ya de manera negativa por Euclides mismo al considerarlo como uno de sus axiomas. El método euclidiano de investigación se convirtió con el tiempo en el prototipo de la investigación axiomática, convirtiéndose también la geometría en un modelo para la construcción axiomática en general.

Otro ejemplo de investigación acerca de la dependencia de los axiomas lo encontramos en la mecánica clásica. Como hemos señalado, las ecuaciones de Lagrange para el movimiento pueden fungir provisionalmente como axiomas de la mecánica. Ciertamente ésta puede basarse enteramente en una formulación general de tales ecuaciones para fuerzas y condiciones secundarias cualesquiera. Sin embargo, un examen más detenido del problema nos muestra que para la construcción de la mecánica no es necesaria la suposición de fuerzas ni de condiciones secundarias arbitrarias, por lo que el conjunto de presuposiciones puede reducirse. Esta circunstancia conduce, por una parte, al sistema axiomático de Boltzmann, que considera solamente fuerzas, o más exactamente: fuerzas centrales, omitiendo toda referencia a las condiciones secundarias; pero, por la otra, conduce también al sistema axiomático de Hertz, que prescinde de las fuerzas y se ocupa exclusivamente de las condiciones secundarias (en especial de aquellas con conexiones fijas). Es claro entonces que estos dos sistemas se ubican en un estrato más profundo en el proceso de axiomatización de la mecánica.

Si en la fundamentación de la teoría de las ecuaciones de Galois consideramos como un axioma la existencia de las raíces de una ecuación, podemos tener la certeza de que lo que obtendremos es un axioma dependiente, pues como Gauss ha mostrado, toda proposición de existencia es demostrable a partir de los axiomas de la aritmética.

Lo mismo ocurre, por ejemplo, en la teoría de los números primos cuando queremos suponer como axioma el principio de la existencia de

los ceros de la función $\zeta(t)$ de Riemann. Al pasar al estrato axiomático más profundo de la aritmética pura nos percatamos de la necesidad de demostrar este principio de existencia, preservando al mismo tiempo sus importantes consecuencias para la teoría de los números primos, consecuencias con las que ahora contamos únicamente gracias a su postulación como axioma.

De particular interés para el enfoque axiomático y la cuestión de la dependencia de los principios de una esfera del conocimiento resulta el axioma de *continuidad*.

En la teoría de los números reales se establece que el axioma de la medida, también conocido como axioma de Arquímedes, es independiente de todos los demás axiomas de la aritmética. Es bien sabida la importancia que este hecho tiene para la geometría. En mi opinión, resulta también de considerable interés para la física en vista de la siguiente consideración. El hecho de que podamos llegar por composición de distancias terrestres a dimensiones y distancias de cuerpos en el espacio, es decir, el hecho de que con una medida terrestre resulten conmensurables las longitudes celestes y que las distancias en el interior del átomo puedan también ser expresadas con una medida métrica, no es una mera consecuencia lógica de los principios relativos a las congruencias triangulares y a la configuración geométrica, sino que constituye un resultado de la investigación empírica. Precisamente en este sentido, la validez del axioma de Arquímedes en la naturaleza requiere de una confirmación experimental, de la misma manera en que —en el sentido que todos conocemos— la requiere el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo.

En general, la formulación del axioma de continuidad que me parece más adecuada en la física es la siguiente:

Si para la validez de un enunciado físico se hace necesario un grado arbitrario de exactitud, entonces es posible encontrar intervalos pequeños dentro de los cuales las suposiciones del enunciado pueden variar libremente, sin que la desviación del enunciado supere el grado requerido de exactitud.

Este axioma expresa lo esencial del experimento. Se trata de un principio constantemente presupuesto por los físicos que hasta ahora no había sido formulado de manera explícita.

El axioma de continuidad resulta así imprescindible, por ejemplo, cuando siguiendo a Planck derivamos el segundo principio del calor a partir del axioma de la imposibilidad de un *perpetuum mobile* del segundo tipo.

Sirviéndose del principio del buen orden del continuo, Hamel ha ofrecido una prueba muy interesante de la necesidad de utilizar el axioma de continuidad para la fundamentación de la estática, en la demostración del enunciado del *paralelogramo de las fuerzas*, por lo menos en lo que se refiere a una cierta y evidente elección de los otros axiomas.

También los axiomas de la mecánica clásica pueden ser objeto de una ubicación más profunda si, sirviéndonos del axioma de continuidad, analizamos el movimiento continuo en movimientos parciales sucesivos rectos y uniformes que son producidos por impulsos, y utilizamos luego el *principio de maximalidad de Bertrand* como el axioma fundamental de la mecánica. De acuerdo con éste, el movimiento que realmente tiene lugar después de cada impulso es siempre aquel en relación al cual la energía cinética del sistema puede verse como el máximo de todos los movimientos compatibles con el principio de conservación de la energía.

No nos ocuparemos aquí de los nuevos tipos de fundamentación de la física (particularmente la electrodinámica) que son en su totalidad teorías del continuo y que plantean, en el sentido más amplio, la exigencia de continuidad. La razón de ello es que se trata, en realidad, de investigaciones que aún están en curso, por lo que su consideración resultaría necesariamente incompleta.

Concentrémonos ahora en el segundo de los puntos de vista que hemos mencionado, esto es, en el problema de la *consistencia* de los axiomas.

Es evidente la importancia que este problema tiene para valorar una teoría. La existencia de contradicciones en ella pone en entredicho la existencia misma de la teoría. Ahora bien, establecer la consistencia interna dista de ser una tarea fácil, aun en el caso de teorías reconocidas y exitosas. Recordemos en este sentido las objeciones, en la teoría cinética de los gases, a la reversibilidad.

Con frecuencia se considera como algo obvio que una teoría sea consistente. Sin embargo, es necesario llevar a cabo un desarrollo matemático de bastante profundidad para demostrarlo. Consideremos como ejemplo un problema de la teoría elemental de la *transmisión del calor*, a saber, la distribución de la temperatura dentro de un cuerpo homogéneo cuya superficie se mantiene a una cierta temperatura variable de acuerdo con el lugar. En tal caso, es un hecho que la exigencia de un equilibrio de la temperatura no significa necesariamente una contradicción en la teoría. Sin embargo, para saber si esto es realmente así, se hace necesario

ofrecer una prueba de que el conocido problema del valor marginal de la teoría potencial es siempre soluble, pues es precisamente la solución de esta dificultad la que establece la posibilidad de un reparto de la temperatura que satisfaga la ecuación de la distribución del calor.

Por lo demás, en la física no resulta nunca suficiente que los enunciados de una teoría sean compatibles entre sí; se requiere también que esos enunciados no contradigan enunciados de alguna otra disciplina cercana.

Así por ejemplo, como he demostrado recientemente, los axiomas de la teoría elemental de la radiación proporcionan no sólo una fundamentación del *principio de Kirchhoff* acerca de la absorción, sino igualmente un principio especial relativo a la reflexión y la refracción de los rayos de luz particulares a saber: si dos rayos de luz natural caen con la misma energía desde lados distintos sobre la superficie de división de dos medios, de tal manera que la dirección que toma el primero después de su incidencia y la que toma el segundo después de su reflexión son la misma, entonces el rayo resultante de su unión es también un rayo de luz natural y posee la misma energía. Es posible demostrar que este principio es enteramente compatible con la óptica y que puede, además, derivarse como consecuencia de la teoría electromagnética de la luz.

Es bien sabido que los resultados de la *teoría cinética de los gases* son compatibles con *la termodinámica*. De manera análoga, la *inercia electromagnética* y la *gravitación einsteiniana* son consistentes con los conceptos correspondientes de las teorías clásicas, en la medida en que éstas se consideren como casos límite de los conceptos generales de las nuevas teorías.

Por el contrario, la *teoría cuántica moderna*, lo mismo que el conocimiento progresivo de la estructura del átomo, ha conducido a leyes que contradicen a la electrodinámica actual, basada esencialmente en las ecuaciones de Maxwell, por lo que resulta evidente la necesidad de reformarla radicalmente y de darle nuevos fundamentos y organización.

Vemos así que en las teorías físicas la supresión de las contradicciones debe lograrse por medio de una modificación en la elección de los axiomas. La única dificultad que ello trae aparejada es la de elegir los axiomas de tal manera que todas las leyes físicas observadas resulten una consecuencia lógica de los mismos.

Algo distinto ocurre con la aparición de contradicciones en esferas del conocimiento cuyo carácter es puramente teórico. El ejemplo clásico

de una situación de este tipo nos lo ofrece la teoría de conjuntos, y, más específicamente, la *paradoja del conjunto de todos los conjuntos* de Cantor. La importancia de esta paradoja es tan grande que matemáticos de la talla de Kronecker y Poincaré se vieron obligados a negarle el derecho a la existencia a la teoría de conjuntos en su totalidad, a pesar de constituir ésta, en nuestra opinión, una de las ramas más fructíferas y vigorosas de las matemáticas en general.

El método axiomático resulta también de gran utilidad para una situación tan delicada como ésta. Zermelo ha presentado un sistema de axiomas adecuado que, por una parte, restringe lo arbitrario de las definiciones de conjuntos, y, por la otra, limita la validez de las afirmaciones acerca de sus elementos[1]. A partir de esto, Zermelo logra desarrollar una teoría de conjuntos en la que las contradicciones que hemos estado mencionando desaparecen, y que, a pesar de las restricciones, conserva en lo esencial la fuerza en cuanto a alcance y aplicabilidad de la teoría original.

Hasta ahora, el surgimiento de las contradicciones se ha dado en el curso del desarrollo de una teoría, planteándose la necesidad de su eliminación por medio de modificaciones en el sistema de los axiomas. En el caso de las matemáticas, es decir, cuando se trata de recuperar el prestigio de éstas como modelo de las ciencias exactas, lo anterior no basta. La exigencia de principio de una teoría axiomática debe, más bien, extenderse hasta el punto de mostrar que las contradicciones resultan *imposibles* dentro de una esfera del conocimiento demarcada por un cierto sistema de axiomas.

Esta es precisamente la exigencia que hemos tenido en mente cuando en los *Grundlagen der Geometrie* demostramos la consistencia de los axiomas de esa teoría. El procedimiento seguido allí es el de probar que cualquier contradicción que se presente como consecuencia de los axiomas de la geometría, conduce necesariamente a un resultado similar en la aritmética del sistema de los números reales.

Es evidente que también en las ciencias físicas ocurre con frecuencia que la cuestión de la *consistencia interna* depende de la consistencia de los axiomas de la aritmética. Yo mismo he demostrado en otra parte, por

---

[1] E. Zermelo, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", *Mathematische Annalen* 65, 1908. [N. de T.]

ejemplo, la consistencia de los axiomas de la *teoría elemental de la radiación*, construyendo un sistema axiomático a partir de porciones analíticamente independientes de la misma y dando por supuesta para todo ello la ausencia de contradicciones en el análisis.

Podemos y debemos proceder de manera similar en la construcción y el desarrollo de una teoría matemática. Consideremos, por ejemplo, la teoría de grupos de Galois. Si en el desarrollo de ésta hemos tomado ya como axioma el teorema de la *existencia de raíces*, o el principio de existencia *de los ceros* de la función riemaniana $\zeta(t)$ en la teoría de los números primos, la prueba de la consistencia del sistema axiomático equivale precisamente a establecer el principio de la existencia de raíces, o el teorema riemanniano sobre la función $\zeta(t)$, por medios puramente analíticos. Sólo entonces puede garantizarse en forma acabada la teoría en cuestión.

Análogamente, el problema de la consistencia de un sistema de axiomas para los *números reales* remite al problema correspondiente en relación a los números enteros. Este es un resultado de las teorías de Weierstraß y Dedekind para los números irracionales.

Hay, sin embargo, dos casos en los que es evidente que este procedimiento de reducción a una esfera más particular no nos es útil, el del sistema axiomático para los números *enteros* y el de la fundamentación de la *teoría de conjuntos*. No existe, en efecto, en relación a ellos y aparte de la lógica, ninguna disciplina a la que podamos apelar.

Ahora bien, en vista del carácter ineludible de una demostración de consistencia, parecería necesario axiomatizar en primer lugar a la lógica misma y probar luego que tanto la teoría de los números como la de conjuntos no son otra cosa que parte de ella.

Este camino había sido preparado desde hace algún tiempo, entre otros y de manera conspicua por las profundas investigaciones de Frege. Pero ha sido el agudo lógico y matemático B. Russell quien finalmente y con mayor éxito lo ha recorrido. En realidad, podemos considerar que la conclusión de la gran empresa russelliana de una *axiomatización de la lógica* constituye al mismo tiempo la culminación de la tarea de axiomatización en general.

Sin embargo, los resultados de Russell plantean todavía una nueva y versátil tarea. Con esto queremos decir lo siguiente. Una reflexión cuidadosa muestra que el tema de la consistencia en relación a los números enteros y los conjuntos no es algo que podamos considerar de manera aislada, sino que forma parte de una problemática muy amplia,

de gran contenido teórico-cognoscitivo y con características matemáticas específicas. Bastará mencionar aquí algunas de esas dificultades para tener una idea del conjunto de esos problemas en su totalidad. Tenemos, por ejemplo, la de la *solubilidad de cualquier problema matemático; el* problema de la *posibilidad ulterior de control* de los resultados de una investigación matemática; la cuestión de un *criterio para la sencillez* de las demostraciones matemáticas; el problema de las relaciones entre *contenido concreto* [Inhaltlichkeit] y *formalismo* en las matemáticas y la lógica; y también, por último, el problema de la *decidibilidad* de un problema matemático por medio de un número finito de operaciones. No podemos darnos por satisfechos con la axiomatización de la lógica hasta que no hayamos comprendido y aclarado en su contexto todos estos problemas.

Entre las dificultades que hemos mencionado, la más conocida es la relativa a la decidibilidad por medio de un número finito de operaciones. Es, además, la que ha sido con mayor frecuencia objeto de discusiones. La razón de ello reside en que se trata de un problema que afecta profundamente la esencia misma del pensamiento matemático.

Me gustaría contribuir a acrecentar el interés por esta cuestión mencionando algunos problemas matemáticos particulares en los que desempeña un papel importante.

Como sabemos, en la teoría de los *invariantes algebraicos* resulta válido el principio fundamental de que siempre existe un número finito de invariantes racionales, por medio de los cuales todos los demás pueden representarse de una manera enteramente racional. La primera prueba general de esta afirmación, que yo mismo he presentado, satisface del todo las exigencias que pudieran plantearse en cuanto a sencillez y claridad. Sin embargo, resulta imposible modificar esta demostración a modo de obtener con ella un límite determinado del número (finito) de variantes de todo el sistema u ofrecer de plano una representación específica de las mismas.

Más bien se hace necesario introducir ideas completamente distintas, además de nuevos principios, para poner de manifiesto que la especificación de la totalidad del sistema de invariantes requiere simplemente un número finito de operaciones, y que este número se encuentra, por debajo de un cierto límite, señalado antes de la realización de esas operaciones.

Algo parecido ocurre en relación a un ejemplo tomado de la *teoría de las superficies.* Uno de los problemas principales en la geometría de las superficies de cuarto grado es el de determinar el número máximo de ho-

jas[2] separadas de que puede consistir una superficie de ese tipo. Lo primero que tiene que hacerse para la resolución de este problema es dar una demostración de que el número de hojas es finito. Esto puede llevarse a cabo fácilmente recurriendo a la teoría de funciones. Supongamos, en efecto, que existe un número infinito de hojas. Elijamos ahora un punto en cada una de las porciones del espacio acotadas por una hoja. Un punto de acumulación de la infinidad de puntos elegidos sería de tal tipo de singularidad que resultaría imposible para una superficie algebraica.

Este procedimiento, basado en la teoría de las funciones, no conduce en forma alguna a una cota superior para las hojas de las superficies. Para ello sería necesario hacer una reflexión acerca del número de puntos de intersección; pero esto nos haría ver que el número de las hojas no puede nunca ser mayor de 12.

El segundo método difiere esencialmente del primero y no puede aplicarse a este problema, ni modificarse para hacer posible una decisión en cuanto a si realmente existe una superficie del cuarto grado con 12 hojas.

Ahora bien, una forma cuaternaria de cuarto grado posee 35 coeficientes homogéneos. Por lo tanto, podemos representarnos una superficie determinada de cuarto grado por medio de un punto en el espacio de 34 dimensiones. El grado del discriminante de la forma cuaternaria de cuarto grado en los coeficientes de la misma es 108. De acuerdo con ello, cuando se iguala a cero, representa una superficie de grado 108 en el espacio de dimensión 34. Por otra parte, como los coeficientes del discriminante son ellos mismos números enteros definidos, el carácter topológico de la superficie de los discriminantes puede determinarse de manera exacta de conformidad con las reglas comúnes para los espacios de 2 y 3 dimensiones. De este modo, podemos obtener una información precisa sobre la naturaleza y el significado de cada una de las regiones en que la superficie de los discriminantes divide al espacio de dimensión 34.

Todas las superficies de cuarto grado representadas por puntos de las regiones en cuestión poseen el mismo número de hojas, por lo que resulta posible comprobar por medio de un cálculo finito, aunque

---

[2] El término utilizado por Hilbert es el de *Mänteln*, empleado usualmente para denotar a las *cubiertas* de una superficie, sin embargo, como se verá en el contexto de este problema, Hilbert se refiere a las componentes irreducibles reales de una superficie que son llamadas las hojas de la superficie. [N. de Ed.]

complicado y largo, si existe o no una superficie de cuarto grado con n hojas, $n \leq 12$.

Podemos concluir entonces que este tipo de consideraciones geométricas constituye una tercera vía para el tratamiento del problema acerca del número máximo de hojas de una superficie de cuarto grado, estableciendo al mismo tiempo la decidibilidad del problema por medio de un número finito de operaciones. Con ello se logra, en principio, un avance considerable en la resolución de nuestra problemática, pues ésta se reduce ahora a algo similar a la dificultad de conocer la $10^{(10^{10})}$-ésima cifra del desarrollo decimal de π, es decir, a algo cuya solubilidad resulta evidente, pero cuya solución de hecho se ignora.

Fue necesario un difícil y profundo trabajo de investigación en geometría algebraica, llevada a cabo por Rohn para percatarnos de la imposibilidad de que una superficie de cuarto grado tenga 11 hojas, sin embargo hay ejemplos de superficies con 10 hojas. Unicamente la aplicación de este cuarto método nos permite una solución completa del problema[3].

Todos estos ejemplos ponen claramente de manifiesto qué tan diversos pueden ser los métodos de demostración aplicables a un problema. Los hemos expuesto aquí con el objeto de hacer hincapié en la importancia y necesidad de un estudio detallado del concepto mismo de demostración matemática si es que queremos alcanzar una explicación plausible de ciertas dificultades, como la de la decibilidad por medio de un número finito de operaciones.

Todos los problemas básicos que hemos caracterizado, de entre los cuales este último no es sino uno más, conforman un nuevo e importante campo de investigación. Su exploración y desarrollo requieren esencialmente de un estudio a fondo del concepto de demostración matemática, de manera análoga a como el astrónomo está obligado a considerar el movimiento de su punto de referencia, el físico a preocuparse por la teoría de sus instrumentos y el filósofo a hacer una crítica de la razón.

---

[3] Este problema forma parte del problema número 16 (problema de la topología de curvas y superficies algebraicas) planteado por Hilbert en su conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticas en Paris en 1900. En 1913 K. Rohn analiza parte de este problema y utiliza el término *óvalos* [Ovalen] para denotar las hojas "... Aquí se demuestra que una superficie de cuarto grado puede tener a lo más diez óvalos y que éstos se encuentran en una situación muy especial entre sí." K. Rohn, *Math. Ann.*, 73, 1913. [N. de Ed.]

Es claro que la realización de esta tarea constituye todavía un problema a resolver en las matemáticas.

Para terminar, he aquí expresada en pocas frases nuestra concepción general del método axiomático.

Todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico cae, con tal de que haya alcanzado un cierto grado de madurez que le permita conformar una teoría, en el terreno propio del método axiomático, y, por lo tanto, de manera mediata en el de las matemáticas. Penetrar, en el sentido que hemos indicado, en niveles axiomáticos más profundos, significa también alcanzar una visión mucho más profunda de la naturaleza y la esencia del pensamiento científico, y dar un paso significativo en el proceso de toma de conciencia de la unidad esencial del conocimiento. En virtud de su estrecha relación con el método axiomático, las matemáticas parecerían llamadas a ocupar un lugar prominente en la ciencia en general.

La nueva fundamentación de las matemáticas

Los fundamentos de las matemáticas han constituido desde hace mucho tiempo un objeto de investigación para autores del más diverso tipo. En el curso de tales estudios han podido surgir y desarrollarse brillantes ideas y se han alcanzado resultados de gran significación y alcance.

En nuestra opinión, en la actualidad se hace indispensable un tratamiento mucho más profundo de los problemas que surgen en esta esfera del conocimiento. Y si en lo personal nos hemos propuesto llevar a cabo esta tarea, ello se debe menos a la intención de reafirmar alguna teoría matemática particular que a la convicción de que ninguna de las investigaciones realizadas hasta ahora acerca de los fundamentos de las matemáticas ha permitido reconocer realmente un método que haga posible la formulación de las cuestiones atinentes a éstos de manera que pueda ofrecerse una respuesta unívoca a los problemas que los mismos plantean. Y es esto precisamente lo que para nosotros se presenta como una exigencia primaria.

En otras palabras, en las matemáticas no debe haber cuestiones que den lugar a dudas de principio, en las matemáticas no deben tener cabida las verdades a medias, ni tampoco pueden admitirse verdades de tipo esencialmente distinto.

De acuerdo con esto y tomando como ejemplo un problema complicado y lejano, debe ser posible formular el axioma de elección de Zermelo en forma tal que resulte tan válido y confiable como la afirmación aritmética de que $2 + 2 = 4$.

Tenemos la plena confianza de que los fundamentos de las matemáticas pueden ser objeto de una clarificación y un conocimiento plenos, pero también de que, aunque sumamente complicado, el problema de la fundamentación de nuestra disciplina es susceptible de una solución

definitiva. En lo que sigue presentaremos en forma resumida una descripción de los medios con los que creemos haber alcanzado ese objetivo, así como del sentido que todo esto pueda tener.

Es un hecho que en la actualidad podemos constatar un interés particular en lo que se refiere a estos problemas. Matemáticos de la talla de Weyl y Brouwer han intentado encontrar una solución a estas dificultades, pero la vía que han sugerido dista, en nuestra opinión, de ser satisfactoria.

Weyl sostiene, en su crítica de las fundamentaciones del concepto de número propuestas hasta ahora, que el procedimiento usual es circular. Weyl cree descubrir un círculo vicioso en el hecho de que al definir los números reales se haga uso de segmentos que dependen de la existencia de números reales con una cierta propiedad. La situación que aquí se presenta parecería ser la siguiente.

Cuando tomamos como punto de partida la definición usual de los números reales como cortaduras de Dedekind, como sucesiones numéricas o como sucesiones fundamentales, lo que a juicio de un matemático común se nos presenta es la coexistencia de distintas perspectivas metódicas. La que Weyl elige y en razón de la cual demuestra la circularidad no es, sin embargo, una de ellas, sino que parecería tratarse más bien de algo preparado de manera artificial.

Weyl justifica su singular concepción argumentando que en ella se preserva el principio de constructividad. Pero es claro que una vez que había mostrado la existencia de un círculo vicioso, lo que tenía que hacer era más bien reconocer que esa concepción, y con ella el principio de constructividad mismo, resultan inutilizables en la versión que nos presenta y utiliza, reconociendo también que a partir de ese enfoque el camino hacia el análisis nos está vedado.

Los enfoques usuales en las matemáticas no se apoyan en forma alguna en el principio de constructividad, pero tampoco son circulares en el sentido que quiere Weyl. Fundamentalmente son dos los puntos de vista a considerar.

El primero plantearía algo como esto. Un número real es una división en segmentos de números racionales que posee la propiedad dedekindiana de las cortaduras. Por supuesto, aquí el concepto de segmento de números racionales es definido de manera precisa, en lo que se refiere a su contenido, y delimitado de igual manera en cuanto a su alcance.

La objeción que frecuentemente se hace a esta definición es que el concepto de segmento de números racionales es esencialmente equivalente al concepto de conjunto, y éste, considerado en toda su generalidad, conduce, como sabemos, a paradojas.

En caso de que Weyl haga suya en alguna forma esta objeción, lo primero que tenemos que notar es que el argumento no es conclusivo. La circunstancia de que el concepto de conjunto no resulte lícito y permisible cuando se le considera en toda su generalidad no excluye la posibilidad de que el concepto de conjunto de números enteros sea fundamentalmente correcto. Y, por lo demás, las paradojas de la teoría de conjuntos no pueden ser en forma alguna entendidas como una demostración de que el concepto de conjunto de los números enteros conduce a contradicciones. Por el contrario: todas nuestras experiencias matemáticas hablan en favor de la corrección y consistencia de ese concepto. Podría argumentarse, sin embargo, que los requerimientos de exactitud prevalecientes en las matemáticas no permiten la aceptación tácita de una suposición de ese tipo en la construcción de una teoría. En tal caso, tenemos que remitirnos al segundo de los enfoques mencionados para la fundamentación del concepto de número y en relación al cual esta objeción no resulta válida. Es decir, tenemos que recurrir al método de fundamentación axiomático. Podemos caracterizar este punto de vista de la manera siguiente.

El continuo de los números reales es un sistema de objetos vinculados entre sí por medio de relaciones definidas, que llamamos axiomas. En particular, tenemos en este contexto que la definición de los números reales mediante cortaduras de Dedekind es reemplazada por los dos axiomas de continuidad, esto es, por el axioma de Arquímedes y por el llamado axioma de completud. Las cortaduras de Dedekind pueden entonces ser usadas para el establecimiento de números reales particulares, sin utilizarse ya para la definición del concepto general de número real. Conceptualmente, un número real no es otra cosa que un objeto de nuestro sistema.

La fundamentación axiomática de la teoría del continuo no se opone en forma alguna a la intuición. En realidad, el concepto de magnitud extendida, tomado de la intuición, es algo independiente del concepto de número, por lo que la distinción fundamental que aquí proponemos entre número y extensión es perfectamente compatible con aquélla.

El enfoque que hemos descrito resulta impecable desde un punto de vista lógico, por lo que el problema que ahora se plantea es el de decidir

si un sistema de este tipo es viable, es decir, si los axiomas no conducen a una contradicción.

Difícilmente encontraremos dentro o fuera de las matemáticas una esfera de la ciencia que haya sido objeto de una investigación más acuciosa que el análisis real. El examen y el seguimiento de aquellos principios deductivos basados en el concepto de conjunto de números ha sido literalmente llevado a su extremo, sin que en ningún sitio se haya presentado ni siquiera la sombra de un error.

Por lo tanto, cuando Weyl cree descubrir una "inestabilidad interna en los fundamentos sobre los que descansa la construcción misma de ese sistema" y se preocupa por el "peligro de disolución que acecha al Estado que llamamos análisis", lo que en realidad ocurre es que ve fantasmas.

En verdad, y a pesar de lo complejo y diverso de las combinaciones que allí se realizan y de lo refinado de los recursos empleados para ello, en el análisis tenemos de hecho una seguridad completa en lo que se refiere a las deducciones, además de una unanimidad más que evidente en cuanto a los resultados obtenidos.

En consecuencia, resulta plenamente justificada la suposición de los axiomas en los que esa seguridad y esa unanimidad se basan. Poner en tela de juicio esta justificación equivale a despojar a la ciencia de toda posibilidad de llevar a cabo las tareas que le son propias. Si la axiomática resulta adecuada en algún lugar, es precisamente aquí.

Por supuesto que con ello se plantea también el problema de dar una prueba de la consistencia de los axiomas. Se trata, en efecto, de un problema conocido y que personalmente nos ha ocupado desde hace más de 20 años. La presente comunicación se ocupa de la solución de este problema.

Lo que Weyl y Brouwer pretenden hacer equivale en principio a recorrer nuevamente el camino que alguna vez siguiera Kronecker. Es decir, Weyl y Brouwer intentan ofrecer una fundamentación de las matemáticas que echa por la borda todo aquello que les resulta incómodo y que establece además (en el sentido de su predecesor) una serie de prohibiciones claramente dictatoriales. Pero esto no significa otra cosa que el desmembramiento, la amputación arbitraria de nuestra disciplina. Al seguir a tales reformadores nos exponemos a perder una gran parte de nuestros más valiosos conceptos, resultados y métodos. Entre las cosas que Weyl y Brouwer pretenden proscribir de las matemáticas se encuentran los conceptos generales de número irracional, de función (lo mismo

que el más particular de función numérica), los números cantorianos de clases superiores, etc. Teoremas como el de que en una totalidad infinita de números enteros existe siempre un mínimo e inclusive la ley lógica del tercero excluido en afirmaciones como "O bien existe solamente un número finito de números primos, o bien existe un número infinito de los mismos" son ejemplos de proposiciones y principios deductivos que nos estarían prohibidos.

Estamos firmemente convencidos de que así como Kronecker fracasó en su intento de eliminar a los números irracionales (Weyl y Brouwer todavía nos permiten conservar algún fragmento de los mismos) sus seguidores no correrán con mejor suerte. Brouwer ciertamente no representa, como cree Weyl, la revolución, sino tan sólo una nueva edición de un intento de golpe de Estado que se sirve de recursos por demás añejos, un golpe de Estado intentado en su tiempo de manera mucho más brillante y rigurosa y que, no obstante, fracasó por completo. Al presente y con un poder estatal firme y bien pertrechado gracias a las contribuciones de matemáticos de la talla de Frege, Dedekind y Cantor, la nueva asonada está condenada desde el principio a correr la misma suerte que la precedente.

En resumen, si vamos a hablar de una crisis en las matemáticas no podemos afirmar, como hace Weyl, que se trata de una nueva crisis en nuestra disciplina. El círculo vicioso es algo que Weyl introduce de manera artificial en el análisis. La descripción de la supuesta inseguridad que permea los resultados del análisis no corresponde a ningún hecho real.

En lo que se refiere a las tendencias constructivistas, en las que tanto Weyl como Brouwer hacen gran énfasis, podemos afirmar que es precisamente Weyl el que ha errado por completo el camino para la realización de las mismas. La vía axiomática es, de hecho, la única capaz de hacer justicia a tales tendencias, en la medida en la que tales tendencias resulten naturales.

El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojarla. Tenemos la firme convicción de que esto es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas. El método adecuado para la realización de estos fines es, por supuesto, el método axiomático. Lo esencial de este método se expondrá a continuación.

Cuando queremos investigar una esfera particular del conocimiento, lo que hacemos es tratar de darle una base en el menor número posible de principios. Estos principios, a los que llamamos axiomas, han de ser tan simples, intuitivos y comprensibles como sea posible. Al hacer esto, nada nos impide tomar como axiomas proposiciones demostrables o proposiciones que pensemos que son susceptibles de prueba. La historia nos ofrece en verdad evidencia clara de lo adecuado de este procedimiento.

Recordemos, como ejemplos de lo anterior, el postulado de Legendre sobre números primos en la teoría de los residuos cuadráticos, la conjetura de Riemann sobre los ceros de la función $\zeta(s)$, el principio de la existencia de raíces en el álgebra y, por último, la llamada hipótesis ergódica, un principio de cuya prueba estamos todavía muy alejados y que, no obstante, se ha convertido en fundamento de la mecánica estadística.

El método axiomático constituye entonces el recurso irrenunciable y más adecuado a nuestro intelecto para cualquier investigación exacta, independientemente del sitio en el que ésta se lleve a cabo. La axiomatización es un procedimiento no sólo fructífero, sino impecable desde el punto de vista lógico, además de garantizar la más amplia libertad en la investigación científica. Proceder de manera axiomática no significa otra cosa que pensar conscientemente [mit Bewusstsein denken].

Por supuesto, todo esto también ocurría antes, sin el método axiomático. Pero tenía lugar de una manera ingenua, por lo que ciertas relaciones adquirían el carácter de dogmas. La axiomatización nos libera de esa ingenuidad, pero nos permite disfrutar aún de los beneficios de la creencia.

Hay algo aquí, sin embargo, que es mucho más importante. Precisamente gracias al desarrollo que experimenta bajo nuestra concepción el método axiomático, estamos en condiciones de apreciar la manera en la que éste nos permite alcanzar la máxima claridad acerca del papel que juegan los principios deductivos en las matemáticas.

Como ya hemos mencionado, no podemos tener nunca la plena seguridad de que los axiomas elegidos son consistentes, si no hemos dado todavía una demostración explícita de este hecho. La axiomática nos obliga entonces a adoptar una posición en lo que se refiere a este complejo problema epistemológico.

En muchos casos resulta posible ofrecer una demostración de la consistencia de los axiomas. Esto ocurre, por ejemplo, en la geometría, en la termodinámica, en la teoría de la radiación, así como en otras

disciplinas físicas. Pero en todas ellas lo que se hace es remitir el problema a la consistencia de los axiomas del análisis. La consistencia de éstos constituye todavía un problema abierto en las matemáticas. En realidad, hasta ahora han sido más bien escasos los intentos serios de establecer la consistencia de los axiomas de la teoría de los números, del análisis o de la teoría de conjuntos.

A Kronecker se debe la famosa afirmación de que Dios creó los números enteros y el resto es obra de los hombres. De acuerdo con esto, quien bien puede ser considerado como el dictador por antonomasia en las matemáticas proscribió todo lo que no se presentaba como número entero. Una extensión de sus reflexiones acerca de los números enteros era algo que, en consecuencia, se alejaba de sus intereses personales y de su escuela.

Poincaré, por su parte, se encuentra de antemano convencido de la imposibilidad de dar una demostración de la consistencia de los axiomas de la aritmética. En su opinión, el principio de inducción completa no es sino una propiedad de nuestro espíritu; es decir, en el lenguaje de Kronecker, algo creado por Dios mismo[1]. Su objeción acerca de la imposibilidad de demostrar ese principio de otra manera que recurriendo a la inducción completa misma es injustificada y es, de hecho, refutada por nuestra teoría.

En la filosofía sí ha sido reconocida la importancia del problema de la consistencia de los axiomas de un sistema. Sin embargo, en la literatura existente al respecto no hemos logrado encontrar ninguna exigencia clara de solución de este problema en un sentido matemático. Por el contrario, los viejos esfuerzos por fundamentar la teoría de los números y el análisis en la teoría de conjuntos y ésta en la lógica tocan el núcleo mismo de toda esta problemática.

Tanto Frege como Dedekind han intentado ofrecer una fundamentación de la teoría de los números, recurriendo exclusivamente a la lógica pura el primero, y apoyándose en la teoría de conjuntos en tanto parte de esta última el segundo. Sin embargo, ninguno de ellos ha conseguido llevar a feliz término sus objetivos originales. En Frege tenemos una serie de construcciones de conceptos de uso corriente en la lógica que son aplicados sin la debida precaución en las matemáticas. Frege considera, por ejemplo, que la extensión de un concepto es algo dado sin más, de

---

[1] *Cfr.* "Les mathématiques et la logique", en *Rev. Met. et Mor.* 14, 1906 pp. 21-22. [N. de T.]

tal manera que puede tomarse, a su vez, sin restricciones, como un nuevo objeto. En cierto sentido, podemos decir que su error consiste en incurrir en un realismo conceptual extremo.

Algo parecido le ocurre a Dedekind. Su error, ya clásico, consiste en tomar como punto de partida el sistema de todos los objetos. Y no obstante lo agudo que pudiera parecernos su brillante idea de tomar al infinito mismo como fundamento del número finito, en la actualidad se reconoce generalmente la imposibilidad de este proyecto (entre otras razones debido a los argumentos que se mencionan más abajo).

A pesar de todas estas dificultades, los trabajos de Frege y Dedekind son de un inmenso valor. Ciertamente a ellos se debe el inicio de la crítica moderna del análisis, continuada más adelante por pensadores como Cantor, Zermelo y Russell. Esta crítica no "desemboca", como quiere Weyl, "en el caos y el vacío", sino más bien, por una parte, en teorías (particularmente las de Zermelo y Russell) de gran profundidad y que se encuentran provistas de una base axiomática y, por la otra, en un desarrollo idóneo del llamado cálculo lógico, cuyas ideas se han convertido con el tiempo en un instrumento absolutamente imprescindible para la investigación lógico-matemática.

Este sería, en nuestra opinión, el panorama que actualmente presentan los fundamentos de las matemáticas. De acuerdo con ello, la conclusión satisfactoria de las investigaciones relativas a los mismos es algo que sólo puede lograrse con la solución del problema de la consistencia de los axiomas del análisis. Al ofrecer una demostración de este tipo, estaríamos constatando al mismo tiempo el carácter indubitable y definitivo de los teoremas matemáticos, un hecho que por su naturaleza filosófica general resulta de gran interés y significación.

Ocupémonos entonces de la solución de este problema.

Como hemos visto, el manejo abstracto de las extensiones de conceptos y de los contenidos ha mostrado ser no sólo insuficiente, sino también bastante inseguro. Más bien, lo que se hace necesario como medida previa a la aplicación de inferencias y operaciones lógicas es la existencia en la representación [Vorstellung], como algo dado, de ciertos objetos extralógicos discretos, intuitivamente presentes antes de cualquier pensamiento como vivencia inmediata.

Si la inferencia lógica ha de tener la seguridad que deseamos, estos objetos deben ser susceptibles de una visión global y completa de todas sus partes, y su postulación, distinción y sucesión deben presentarse ante

nosotros de inmediato con los objetos mismos de manera intuitiva, como algo irreductible.

En este enfoque, en clara y explícita oposición a Frege y Dedekind, son los *signos* mismos los objetos de la teoría de los números. Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de manera segura, puede ser identificado[2]. El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no sólo de las matemáticas puras, sino en general de todo el pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: *en un principio era el signo.*

Una vez provistos de estas ideas filosóficas, podemos pasar a ocuparnos de la teoría elemental de los números. Preguntémonos, en primer lugar, si (y en qué medida) la teoría de los números puede erigirse sobre la base puramente intuitiva de los signos concretos. Comencemos entonces por la definición de número.

El signo 1 es un número.

Un signo que comienza y termina con 1, de modo que siempre que el signo 1 aparezca antes del final sea seguido de +, y siempre que tengamos + le siga 1 es también un número.

De acuerdo con lo anterior, los signos

$$1 + 1$$

$$1 + 1 + 1$$

son números.

Estos numerales o signos numéricos [Zahlzeichen] son, en realidad, números y constituyen enteramente a éstos, convirtiéndose ahora ellos mismos en objeto de nuestro estudio. Pero los numerales carecen por completo de cualquier otro *significado* fuera de éste.

Aparte de estos signos, nos serviremos de otros que sí tienen un significado y poseen una función comunicativa. Del signo 2, por ejemplo, como una abreviatura de 1 + 1 , de 3 en lugar de 1 + 1 + 1 , etc. Además

[2] En este sentido, llamaremos "el mismo signo" a aquellos signos que tengan la misma forma.

de éstos, usaremos los signos = y > que resultan de utilidad para la comunicación de afirmaciones. De esta manera, *v.gr.*

$$2 + 3 = 3 + 2$$

no es una fórmula[3], sino que tiene solamente la función de comunicar (tomando en cuenta las abreviaturas que hemos introducido) que $2 + 3$ y $3 + 2$ son, en realidad, uno y el mismo signo, esto es, $1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Tampoco

$$3 > 2$$

es una fórmula, sino que sirve exclusivamente para comunicar el hecho de que el signo 3, esto es, $1 + 1 + 1$ es más extenso que el signo 2, es decir, que $1 + 1$, o lo que es lo mismo, que este último es un segmento de aquél.

Para los fines de la comunicación utilizaremos también las letras minúsculas góticas $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ como numerales. $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ no es entonces una fórmula, sino tan sólo la comunicación de que el numeral $\mathfrak{b}$ es más extenso que el numeral $\mathfrak{a}$. Desde este perspectiva, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ no sería tampoco otra cosa que la comunicación de que el numeral $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es el mismo que $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. La exactitud concreta de esta comunicación puede comprobarse fácilmente como sigue. Supongamos (como parece lícito hacer) que $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$, es decir, que el numeral $\mathfrak{b}$ es más extenso que $\mathfrak{a}$. En ese caso, $\mathfrak{b}$ puede analizarse como $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{c}$ tiene la función de comunicar un número. Tenemos entonces que demostrar que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$, esto es, que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ es el mismo numeral que $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$. Pero es precisamente esto lo que ocurre, si es que $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ es el mismo signo que $\mathfrak{c} + \mathfrak{a}$; es decir, si $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$.

Con ello hemos prescindido, en relación a la comunicación original, de por lo menos un 1 (gracias a la separación de $\mathfrak{a}$). Este procedimiento de separación puede continuarse hasta que los sumandos a intercambiar coincidan. Como todo numeral, $\mathfrak{a}$ está conformado por los signos 1 y + y puede también descomponerse por separación y cancelación de los signos individuales.

En una teoría de los números de este tipo no hay, por supuesto ningún axioma, ni tampoco son posibles las contradicciones. Lo que

[3] Como Bernays observa, Hilbert requiere aquí de la palabra "fórmula" en su sentido estrecho, esto es, para referirse a las fórmulas de la matemática formalizada. Así como se habla de signos con significado, puede también hablarse de fórmulas con significado. [N. de T.]

tenemos son signos concretos como objetos, signos con los que operamos y sobre los que hacemos afirmaciones concretas. En lo que se refiere a la prueba de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ que acabamos de ofrecer, es necesario hacer especial hincapié en que esa demostración no es otra cosa que un procedimiento basado enteramente en la composición y descomposición de los numerales y que difiere esencialmente del principio de inducción matemática completa o inferencia de n a $n + 1$, de fundamental importancia para la aritmética superior.

Como veremos más adelante, la inducción matemática completa es un principio formal de mayor alcance, un principio de nivel superior que a su vez requiere (y es susceptible) de una demostración.

Es seguro que el enfoque intuitivo y concreto que acabamos de describir y utilizar nos permite avanzar considerablemente en la teoría de los números. Pero es también evidente que resulta imposible construir de esta manera la totalidad de las matemáticas. Ya en el paso a la aritmética superior y al álgebra, por ejemplo, esto es, cuando queremos hacer afirmaciones sobre un número infinito de números o de funciones, este procedimiento concreto resulta del todo insuficiente. La razón de ello es que no podemos escribir numerales o abreviaturas para un número infinito de números. De no tener presente esta dificultad, incurriríamos de inmediato en toda la serie de absurdos que con toda razón Frege ha criticado en examen de las distintas definiciones de los números irracionales que tradicionalmente se han presentado.

Pero tampoco el análisis puede ser construido por este método. Para esta construcción se requiere de fórmulas reales, de fórmulas propiamente dichas, por lo que las comunicaciones concretas, tal y como éstas se aplican en la teoría elemental de los números, no bastan para dar cuenta del fundamento del mismo.

Sin embargo, podemos adoptar una perspectiva similar si nos ubicamos en un nivel superior de observación. En éste, los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de una teoría matemática constituyen propiamente el objeto de una investigación concreta. Para este fin debemos reemplazar las argumentaciones concretas normales en una teoría matemática por fórmulas y reglas, representarlas por medio de formalismos. Es decir, es necesario llevar a cabo una formalización estricta de la totalidad de la teoría matemática que incluya sus demostraciones, de tal manera que tanto las inferencias como la construcción de

conceptos en ella sean integrados, siguiendo el modelo del cálculo lógico-matemático, como elementos formales al edificio matemático.

Los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de que este edificio formal consiste son precisamente lo que antes, en la construcción de la teoría elemental de los números que hemos descrito, eran los numerales. Es precisamente a partir de aquí, al igual que ocurre con los numerales en la teoría de números, que podemos efectuar consideraciones concretas, esto es, poner en práctica el pensamiento real.

Los argumentos y las consideraciones concretas que, por supuesto, no son nunca del todo prescindibles, son trasladados a otro sitio, a un nivel superior. Con ello se hace posible en las matemáticas trazar una línea de demarcación estricta y sistemática entre las fórmulas y las demostraciones formales, por una parte, y los argumentos y consideraciones concretas, por la otra.

En lo que sigue, intentaremos mostrar cómo es que estas ideas pueden ser llevadas a la práctica de manera estricta e irreprochable. Como es claro, con ello habremos resuelto también nuestro problema original, esto es, el problema de ofrecer una demostración de la consistencia de los axiomas de la aritmética y el análisis.

Para la teoría concreta [inhaltlich-konkret] de los números resultan suficientes, como hemos visto, los signos 1 y +. Para la obtención de la totalidad de las matemáticas introduciremos distintos tipos de signos.

I. *Signos individuales* (generalmente letras griegas)

1. 1, + (constituyentes de los numerales)
2. $\varphi(*)$, $\psi(*)$, $\sigma(*,*)$, $\delta(*,*)$, $\mu(*,*)$
(funciones de individuos con un lugar vacio, funciones de funciones de individuos)
3. = (igualdad), ≠ (desigualdad), > (mayor que)
(signos matemáticos)
4. Z (ser un número), Φ (ser una función)
5. → ("implicación", un signo lógico)
6. ( ) (cuantificación universal)

II. *Variables* (letras latinas)

1. $a, b, c, d, p, q, r, s, t$ (variables primitivas)
2. $f(*), g(*)$ (variables funcionales, variables de función de función)
3. $A, B, C, D, S, T, U, V, W$ (variables para fórmulas)

III. *Signos para la comunicación* (letras góticas)

1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ (funcionales)
2. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ (fórmulas).

Aclaremos antes que nada el manejo de estos signos.

Los signos yuxtapuestos forman una *cadena* [Zeile][4]; un complejo de cadenas se llama *figura*.

Los signos individuales (I) y las variables (II) son los únicos que forman parte del cálculo y que constituyen la estructura formal propiamente dicha. Los signos de la última clase (III) sirven únicamente para la comunicación al argumentar, así como para consideraciones concretas de cualquier tipo.

Seguiremos aquí la costumbre de utilizar siempre letras griegas para signos individuales (I), latinas para las variables (II) y góticas para los signos de comunicación (III).

Los signos para la comunicación (III) se utilizan en ocasiones, provisionalmente, como *signos de abreviación*. Por supuesto, un signo de abreviación no es más que un signo que sirve para una escritura condensada y que *denota* [bedeutet] otro signo definido. Debemos tener siempre presente, sin embargo, que la introducción de signos de abreviación en la construcción de las matemáticas es algo prescindible en principio. En realidad, los signos de la clase (III) resultan necesarios únicamente para la comunicación en un sentido estricto, es decir, en la operación concreta de las demostraciones formales.

Una *funcional* es ya sea un numeral, una variable primitiva, una función individual o una función variable [variable Funktion] cuyos lugares libres han sido llenados con numerales, variables primitivas o

---

[4] Literalmente: una hilera. [N. de T.]

funciones[5]. Llamamos tambien funcional a una función de función individual o variable con lugares llenos. Una funcional puede siempre, ella misma, ser colocada en el lugar libre correspondiente. Si los lugares de una función o de una función de función se han llenado en su totalidad con funcionales, la cadena resultante es nuevamente una funcional. Así, una funcional es siempre un signo complejo formado por signos de I.1, I.2, II.1 y II.2, pero que no contiene signos de las clases I.3-I.6, ni II.3.

Si a ambos lados del signo = ó del signo ≠ colocamos una funcional, la cadena que se obtiene se llama *fórmula elemental* [Primformel]. Se obtiene también una fórmula de este tipo cuando en el lugar del signo Z se coloca una funcional. En general, si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ denotan funcionales,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$$

$$Z(\mathfrak{a})$$

son también fórmulas elementales.

Si a ambos lados del signo lógico de implicación colocamos una fórmula elemental o una fórmula variable (II.3), obtenemos una *fórmula de implicación*. Si a cada lado del signo de implicación escribimos una fórmula elemental, variable o de implicación, la cadena que se obtiene es también una *fórmula*. En general,

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

es una fórmula si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fórmulas variables o fórmulas que previamente habían sido obtenidas.

A ciertas fórmulas que sirven como cimiento del edificio formal de las matemáticas se les conoce como *axiomas*.

El manejo de los axiomas debera sujetarse a las siguientes reglas.

Los signos individuales no pueden ser objeto de un reemplazo; las variables primitivas pueden ser reemplazadas por cualquier funcional[6].

---

[5] Según Bernays, todas estas estipulaciones pueden precisarse con ayuda del concepto de *especie* [Gattung]. En tal caso, todo lugar debe referirse a una especie determinada. [N. de T.]

[6] Bernays observa aquí que este sería el punto en el que habría que introducir la regla de sustitución para las variables de fórmulas [Formelvariablen]. *Cfr.* D. Hilbert y P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, 4, pp. 89 *ss.* y 98. [N. de T.]

El uso de paréntesis es común, esto es, para separar partes de signos, para indicar lugares libres, para seguridad y univocidad en la sustitución de cadenas.

El signo de cuantificación universal, un paréntesis izquierdo y uno derecho con una variable entre ambos, I.6, es también un signo lógico. El segmento de fórmula que sigue al cuantificador y que, en general, contiene esa variable se delimita por medio de un paréntesis especial que indica claramente el alcance del cuantificador.

Para el signo de cuantificación deberán observarse las siguientes reglas.

Una variable en una fórmula se encuentra *libre* si no se encuentra en un signo de cuantificación en esa fórmula. Podemos siempre anteponer a una fórmula un signo de cuantificación con una variable libre; la totalidad de esa fórmula constituye entonces el alcance de ese cuantificador. Por el contrario, podemos prescindir de un signo de cuantificación cuyo alcance es el resto de la fórmula.

Una variable que se encuentra dentro de un signo de cuantificación puede ser reemplazada en ese sitio y en la fórmula afectada por ese cuantificador por cualquier otra variable que no aparezca en esa fórmula.

Dos signos de cuantificación yuxtapuestos y con el mismo alcance pueden intercambiarse entre sí.

Si

$$(b)(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(b))$$

es parte de una fórmula y en $\mathfrak{A}$ no aparece la variable b, entonces (b) puede colocarse después del signo $\rightarrow$, obteniéndose

$$\mathfrak{A} \rightarrow (b)\mathfrak{B}(b).$$

Ahora mostraremos cómo pueden obtenerse los teoremas relativos a las operaciones elementales a partir de este nuevo enfoque formal. Para este fin, necesitamos de una lista de axiomas.

1. $a = a$
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1,$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1,$
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b,$
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b).$

y del esquema de inferencia

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\end{matrix}}{\mathfrak{T}}.$$

Las demostraciones formales para las ecuaciones numéricas pueden entonces realizarse como en el ejemplo que a continuación ofrecemos.

Del axioma 1 obtenemos por sustitución

$$1 = 1\,,$$

y también, utilizando las abreviaturas 2 para 1+1 y 3 para 2+1

$$(1) \qquad 2 = 2$$

y

$$(2) \qquad 3 = 3\,.$$

A partir del axioma 2 resulta por sustitución

$$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1\,,$$

o sea,

$$1 + 2 = 2 + 1\,,$$

o, equivalentemente,

$$(3) \qquad 1 + 2 = 3$$

Con el axioma 5 llegamos también a

$$3 = 3 \to (1 + 2 = 3 \to 3 = 1 + 2)\,,$$

y al esquema

$$1 + 2 = 3 \to 3 = 1 + 2\,,$$

y, finalmente, por (3) y el esquema de inferencia, a

$$3 = 1 + 2\,.$$

Con ello queda establecido el carácter demostrable de esta fórmula a partir de nuestros axiomas.

Los axiomas de que disponemos son insuficientes para obtener todas las fórmulas que necesitamos. Se abre entonces la posibilidad de añadir

otros axiomas a nuestra lista para lograr este objetivo. Antes de esto, es necesario explicitar lo que es una demostración, así como establecer indicaciones precisas acerca del uso de los axiomas.

Una *demostración* es una figura que se presenta ante nosotros de manera intuitiva. Una demostración consta de inferencias justificadas por el esquema

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}},$$

donde cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}$ es un axioma (es decir, se obtuvo directamente de un axioma por sustitución) o coincide con la *fórmula final* de una inferencia previa en la demostración, o bien resulta de una fórmula final por sustitución.

Una fórmula es *demostrable* si es un axioma, se obtiene de un axioma por sustitución, es la fórmula final de una demostración o resulta de una fórmula final de una demostración por sustitución.

Esto implica que tenemos que entender el concepto de demostrabilidad como algo relativo al sistema axiomático que se tome como base. Pero este relativismo resulta, en realidad, bastante natural y, además, necesario. Tomarlo así no perjudica en forma alguna, pues el sistema se extiende constantemente y la construcción formal resulta cada vez más completa, en consonancia con la tendencia constructivista que nos hemos propuesto.

Hemos dicho ya que para realizar nuestros objetivos tenemos que hacer de las demostraciones mismas el objeto de nuestra investigación. Nos vemos así obligados a desarrrollar una *teoría de la demostración*, cuya materia de estudio la constituye el manejo y la operación de las demostraciones mismas.

Para la teoría intuitiva y concreta [konkret-anschaulich] de los números que hemos expuesto antes son los números los que constituyen lo objetivo y ostensivo, mientras que las demostraciones de los teoremas numéricos caen ya en el ámbito del pensamiento [gedanklich]. En nuestra investigación presente, la demostración misma se convierte en algo concreto y ostensivo, las consideraciones y la argumentación concretas no tienen lugar sino a partir de la demostración. Así como el físico examina sus aparatos, el astrónomo su punto de referencia y el filósofo

lleva a cabo una crítica de la razón, también el matemático se ve obligado a asegurar sus teoremas, y para ello requiere de una teoría de la demostración.

Recordemos que nuestro objetivo primario es ofrecer una prueba de consistencia. En realidad, desde nuestro punto de vista actual este problema carece, en rigor, de sentido, puesto que lo único de que disponemos son fórmulas "demostrables" que, de cierta manera, equivalen exclusivamente a afirmaciones positivas, por lo que no pueden nunca dar lugar a una contradicción. Podríamos aceptar, aparte de $1 = 1$, $1 = 1 + 1$ como fórmula, con tal de que ésta se estableciera como una fórmula demostrable por medio de las reglas de inferencia.

Ahora bien, si nuestro formalismo ha de constituir un verdadero sustituto para la teoría real original (que consistía de inferencias y afirmaciones), también una contradicción concreta debe tener su contraparte formal. Para que esto sea así, debemos aceptar, además de la igualdad, la desigualdad. Y como ocurría con aquélla, ésta debe ser tomada en cierto sentido como un enunciado positivo e introducirse por medio del signo $\neq$, añadiendo nuevos axiomas.

Por supuesto estos axiomas se sujetarán a las reglas que para ellos hemos introducido anteriormente. Podemos decir ahora que un sistema axiomático es *consistente* si en él no podemos nunca obtener como fórmulas demostrables

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ y } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son funcionales.

Tomando esto en cuenta, introducimos ahora un nuevo axioma

6. $a + 1 \neq 1$,

prescindiendo al mismo tiempo, en aras de la sencillez, del axioma 2.

El primer paso que tenemos entonces que dar para establecer el resultado de consistencia que nos interesa para nuestra nueva teoría de la demostración consiste en probar el siguiente teorema.

El sistema axiomático que consta de

1. $a = a$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$,
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$,

5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$,

6. $a + 1 \neq 1$,

como axiomas es consistente.

La demostración consta de varios pasos.

LEMA. Una fórmula demostrable puede contener el signo $\rightarrow$ dos veces como máximo.

Supongamos que se nos presenta una demostración de una fórmula en la que $\rightarrow$ aparece más de dos veces. Existe entonces en nuestra prueba una primera fórmula con esta propiedad, no existiendo una fórmula anterior a la misma que contenga ese signo más de dos ocasiones. Ahora bien, esta fórmula no pudo obtenerse por sustitución en un axioma, puesto que lo único que puede ponerse en lugar de a, b, c son funcionales que no involucran el signo de implicación $\rightarrow$. Pero tampoco pudo haberse obtenido como fórmula final $\mathfrak{T}$ de una inferencia. De ser así, la segunda premisa de tal inferencia tendría que haber sido $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$ y en ésta, el signo $\rightarrow$ aparecería más de dos ocasiones, lo que contradiría la descripción de $\mathfrak{T}$.

Demostremos también el siguiente

LEMA. Una fórmula $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ es demostrable sólo si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son el mismo signo.

Distinguiremos nuevamente los dos casos posibles. En el primero, la fórmula se obtiene directamente por sustitución en un axioma. El único principio de este tipo que pudo haberse utilizado es el axioma 1, en cuyo caso el lema resulta evidente.

Supongamos ahora que se nos presenta una demostración con $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ como fórmula final y que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ no son el mismo signo. Supongamos, además, que anteriormente en la misma demostración no aparece otra fórmula con esta propiedad. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ tendría que coincidir con $\mathfrak{T}$, mientras que $\mathfrak{S}$ tendría que ser una fórmula demostrable. La segunda premisa debe tener entonces la forma

(4) $$\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,.$$

Esta fórmula tendría que haberse obtenido o bien por sustitución en un axioma, o como fórmula final de una demostración. En el primer caso, los axiomas 3 y 4 serían los únicos que podrían haber intervenido. Si el axioma utilizado es el 3, $\mathfrak{a}$ tendría que ser de la forma $\mathfrak{a}' + 1$ y $\mathfrak{b}$ de la forma $\mathfrak{b}' + 1$, al tiempo que $\mathfrak{S}$ tendría que ser la fórmula $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$. Sin embargo, si $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{b}'$ son los mismos signos, lo mismo debe ocurrir con

$\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ (en contradicción con lo que habíamos supuesto). Si $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{b}'$ no fueran el mismo signo, entonces $\mathfrak{S}$, esto es $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$ sería una fórmula que aparecería en la demostración antes que $\mathfrak{T}$ y tendría la propiedad que caracterizaba a ésta última, lo que es imposible.

Si el axioma utilizado fue el 4, la fórmula $\mathfrak{S}$ tendría que ser de la forma $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{b} + 1$, en la que no podrían aparecer a ambos lados del signo de igualdad los mismos signos. Pero, nuevamente, esto es imposible debido a que $\mathfrak{S}$ aparece primero en la demostración.

La única posibilidad que resta es que (4) sea la fórmula final de una demostración cuya última inferencia es de la forma

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b})\end{array}}{\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}}$$

Examinemos el origen de su segunda premisa, esto es, de

(5) $$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}).$$

Si esta fórmula se hubiera obtenido por sustitución en un axioma, el único en cuestión sería el axioma 5, por lo que $\mathfrak{S}$ tendría que ser de la forma $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{A}$ de la forma $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$. Si $\mathfrak{t}$ es lo mismo que $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}$ no podría ser sino $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, por lo que esta fórmula tendría que aparecer en la demostración en un lugar previo al que hemos supuesto.

Si $\mathfrak{t}$ no es igual a $\mathfrak{b}$, entonces la fórmula $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ tiene la propiedad que habíamos supuesto originalmente para $\mathfrak{T}$ y aparece, además, antes que ésta en la demostración.

Por lo tanto, la única posibilidad que nos queda es que (5) sea la fórmula final de una inferencia. Pero entonces la segunda de las premisas que interviene en ella debe ser una fórmula en la que aparece por lo menos en tres ocasiones el signo de implicación, lo que signfica, de acuerdo con el lema anterior, que esta fórmula no es demostrable.

Con ello hemos establecido también el segundo de nuestros lemas.

Dijimos antes que un sistema axiomático es consistente si en él no es posible demostrar a la vez

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ y } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}.$$

Ahora bien, como según nuestros lemas, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ es un teorema sólo si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son el mismo signo, la demostración de la consistencia de nuestros

axiomas equivale a mostrar que a partir de ellos no podremos nunca obtener como teorema, como fórmula demostrable, una fórmula de la forma

(6) $$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$$

Para hacer ver esto procederemos como sigue. Para obtener directamente por sustitución en los axiomas una fórmula de la forma (6) (que contiene el signo ≠), sería necesario hacer uso del axioma 6. Pero toda fórmula que resulte a partir de este principio por sustitución es siempre de la forma

$$\mathfrak{a}' + 1 \neq 1\,,$$

donde ciertamente $\mathfrak{a}' + 1$ no es el mismo signo que 1.

Por otra parte, si (6) se presentara como la fórmula final de una inferencia, la segunda premisa de la misma tendría que ser de la forma

(7) $$\mathfrak{S} \to \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$$

(7) no pudo haberse obtenido directamente por sustitución en un axioma, es decir, necesariamente debió ser obtenida por medio de una inferencia. La segunda premisa de ésta sería entonces

$$\mathfrak{T} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a})\,,$$

una fórmula que, por razones similares, debe surgir de una inferencia cuya segunda premisa es necesariamente de la forma

$$\mathfrak{U} \to (\mathfrak{T} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}))\,.$$

Esta fórmula no es demostrable de acuerdo con nuestro primer lema. Pero ello implica también la imposibilidad de que (6) sea un teorema. Esto completa la demostración de la consistencia del sistema constituido por los axiomas

1. $a = a$
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1\,,$
3. $a = b \to a + 1 = b + 1\,,$
4. $a + 1 = b + 1 \to a = b\,,$
5. $a = c \to (b = c \to a = b)\,,$
6. $a + 1 \neq 1\,.$

Hasta ahora no hemos introducido ningún signo lógico aparte de $\rightarrow$. En particular, hemos tenido especial cuidado en evitar la formalización de la operación lógica de la *negación*. Esta es una característica de nuestra teoría de la demostración. La única equivalencia formal para la negación está representada por el signo $\neq$. En cierto sentido, su introducción hace posible una expresión y un tratamiento positivos de la desigualdad, en analogía con la igualdad, cuya contraparte, en realidad, representa.

Desde el punto de vista concreto, la negación se utiliza exclusivamente en la prueba de la consistencia del sistema y, de hecho, solamente en la medida en que coincide con nuestra concepción básica. Ello pondría de manifiesto que nuestra teoría de la demostración tiene también importantes consecuencias epistemológicas, al permitirnos una visión más profunda del significado y la naturaleza de la negación.

El concepto *todos*, como un concepto lógico, está presente en nuestra teoría en virtud tanto de las variables que en ella existen como de las reglas que hemos estipulado para su operación y la del cuantificador.

Una noción lógica que aún tiene que ser formalizada es la de *existe*. Como es bien sabido, en la lógica formal este concepto se expresa recurriendo a la negación y a la idea de totalidad ("*todos*"). Como nuestra teoría carece de una representación directa de la negación, la formalización de existencia, "existe", se logra introduciendo signos de función individuales por medio de una especie de definición implícita, esto es, produciendo realmente, por así decirlo, "lo que existe". El ejemplo más sencillo de ello es el siguiente.

Para expresar la proposición:

Si $\mathfrak{a}$ no es igual a 1, *existe* un número anterior a $\mathfrak{a}$.

Introducimos como signo individual el signo de función $\delta(*)$ de un lugar y añadimos como otro de nuestros axiomas la fórmula

$$7. \quad a \neq 1 \rightarrow a = \delta(a) + 1^{7}.$$

Es posible demostrar nuevamente, aunque aquí sólo nos limitaremos a mencionarlo, recurriendo a una argumentación concreta, que el sistema de los axiomas 1-7 es consistente.

Aunque las reflexiones que hemos expuesto constituyen apenas la parte más elemental de la teoría de la demostración, la tendencia general

---

[7] *Cfr.* el artículo "Acerca del concepto de número" [Cap. I del presente volumen].

de la misma, es decir, la dirección en la que ha de buscarse una nueva fundamentación de las matemáticas es bastante clara. Es importante, sin embargo, destacar dos puntos.

Primero. Todo aquello que hasta ahora ha constituido a las matemáticas reales se convierte en objeto de una formalización estricta; las *matemáticas reales*, esto es, las matemáticas en un sentido estricto, se convierten de esa manera en un conjunto de fórmulas demostrables.

Las fórmulas de este conjunto se distinguen de las fórmulas usuales de las matemáticas solamente por el hecho de que, además de los signos matemáticos, contienen el signo $\rightarrow$, el cuantificador universal y los signos para enunciados.

Esto corresponde a una idea que hemos venido sosteniendo desde hace mucho tiempo. En otras palabras, debido al estrecho vínculo y al carácter indisoluble de las verdades aritméticas y lógicas resulta necesario llevar a cabo una construcción simultánea de la aritmética y de la lógica formal.

Segundo. A esta matemática real debe añadirse una nueva matemática, una *metamatemática*, cuya función es asegurar a la primera, protegiéndola tanto del terror de las prohibiciones innecesarias como de la preocupación de las paradojas. En contraposición a los principios deductivos puramente formales de las matemáticas reales, en la metamatemática se utiliza la inferencia concreta, por ejemplo, para el establecimiento de la consistencia de los axiomas.

De acuerdo con esto, el desarrollo de las matemáticas tiene lugar mediante la alternación constante de dos niveles. En primer término, obteniendo nuevos *teoremas*, esto es, nuevas fórmulas demostrables a partir de los axiomas, por medio de la inferencia formal; en segundo, añadiendo nuevos axiomas junto con la prueba de su consistencia mediante una argumentación concreta.

Ocupémonos ahora de ofrecer una nueva fundamentación de las matemáticas que sea acorde tanto a los principios que hemos establecido como a las tendencias que hemos caracterizado.

Nuestro conjunto de axiomas ha estado constituido hasta ahora solamente por los axiomas 1-7. Todos estos principios son de carácter puramente aritmético. Sin embargo, los teoremas que resultan de ellos no ofrecen todavía un fundamento suficiente para la teoría de los números reales y, de hecho, constituyen tan sólo una pequeña porción de las matemáticas.

Recordemos que en los axiomas 1-7 únicamente aparecen variables primitivas, esto es, letras latinas minúsculas sin lugares vacíos. Pero la fundamentación de la aritmética requiere de una serie de axiomas con variables relativas a fórmulas —letras latinas mayúsculas. Teniendo esto en mente, introduciremos en primer lugar los otros axiomas aritméticos, cada uno con una variable relativa a fórmulas.

Axioma de la igualdad matemática

8. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$.

Axioma de la inducción completa

9. $(a)(A(a) \rightarrow A(a+1))$
$\rightarrow \{A(1) \rightarrow (Z(b) \rightarrow A(b))\}$

Además de 8 y 9 necesitamos los axiomas correspondientes a los principios deductivos lógicos. Los axiomas 10-13 que ahora introduciremos tienen precisamente esa función.

Axioma de la inferencia lógica

10. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
11. $\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$,
12. $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$,
13. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$.

Nuestros siguientes axiomas se refieren a la desigualdad matemática. Podemos servirnos de ellos como de algo equivalente a ciertos principios deductivos que resultan imprescindibles para la argumentación concreta.

Axioma de la desigualdad matemática

14. $a \neq a \rightarrow A$,
15. $(a = b \rightarrow A) \rightarrow \{(a \neq b \rightarrow A) \rightarrow A\}$.

Hemos dicho ya que los principios 1-7 constituyen tan sólo una parte de los axiomas aritméticos que necesitamos para nuestra construcción. Para completarlos se requiere sobre todo de la introducción del signo lógico de función Z (ser entero racional positivo). Por otra parte, se hace también necesaria una restricción del axioma 6. Al mismo tiempo, al utilizar el signo *-1 en lugar del signo de función δ (*), generalizando

y complementando respectivamente los axiomas 2 y 7 y eliminando los axiomas 3, 4 y 5, que se convierten ahora en teoremas, llegamos a un sistema que consta de los siguientes 8 principios en lugar de los anteriores axiomas 2-7.

Axiomas aritméticos

16. $Z(1)$,
17. $Z(a) \rightarrow Z(a+1)$,
18. $Z(a) \rightarrow (a \neq 1 \rightarrow Z(a-1))$,
19. $Z(a) \rightarrow (a+1 \neq 1)$,
20. $(a+1)-1=a$,
21. $(a-1)+1=a$,
22. $a+(b+1)=(a+b)+1$,
23. $a-(b+1)=(a-b)-1$.

Un sistema conformado de esta manera, es decir, un sistema que conste de los axiomas 1,8-23 permite establecer, mediante la simple aplicación de las reglas que hemos expuesto, esto es, formalmente, la totalidad de las fórmulas y teoremas de la aritméticas.

Nuestro primer objetivo en relación a este sistema es encontrar una prueba de consistencia para los axiomas 1, 8-23. De hecho, la demostración es posible, con lo que resulta asegurado[8] el principio deductivo expresado en la inducción completa (axioma 9), de capital importancia en la aritmética.

El paso esencial, es decir, la demostración de la aplicabilidad del principio lógico del tercero excluido a totalidades infinitas de números, funciones o funciones de funciones para inferir que una afirmación es válida para todos esos números, todas esas funciones o todas esas funciones de funciones , o que necesariamente existe entre estos objetos uno (un número, una función o una función de funciones) para el que la afirmación resulta falsa, constituye, sin embargo, una tarea inconclusa.

Sólo mediante la demostración de la aplicabilidad de este principio es posible una fundamentación satisfactoria de la teoría de los números

[8] Bernays dice que se ha demostrardo que esta prueba sólo puede darse si se excluye en cuantificador y la sustitución del axioma 9 por el esquema de inducción. [N. de T.]

reales y sólo ella puede allanar la vía que conduce al análisis y la teoría de conjuntos.

Esta demostración puede llevarse a cabo conforme a las ideas básicas que acabamos de exponer, introduciendo ciertas funciones de funciones τ y α por medio de la postulación de axiomas y la demostración de la consistencia de los mismos.

El ejemplo más sencillo de una función de funciones útil a los fines que acabamos de expones es el de $\kappa(f)$, donde el argumento f es una función numérica variable de la variable primitiva a, de tal suerte que podemos afirmar

$$Z(a) \rightarrow \{f(a) \neq 1-1 \rightarrow Z(f(a))\}$$

donde $\kappa(f) = 1-1$, en caso de que f tenga el valor 1 para toda a, y $\kappa(f)$ sea el menor entero que pueda ser un argumento, en caso contrario.

Los axiomas para esta $\kappa(f)$ son entonces

24. $(\kappa(f) = 1-1) \rightarrow (Z(a) \rightarrow f(a) = 1)$,
25. $(\kappa(f) \neq 1-1) \rightarrow Z\kappa(f)$,
26. $(\kappa(f) \neq 1-1) \rightarrow (f(\kappa(f)) \neq 1)$,
27. $Za \rightarrow \{Z(\kappa(f) - a) \rightarrow f(\kappa(f) - a) = 1\}$

De manera similar podemos introducir una cierta pareja de funciones afines τ y α. Con ellas resulta posible una fundamentación completa de la teoría de los números reales, lo mismo que una demostración de la existencia de una cota superior para cualquier conjunto de números reales.

Deseamos concluir esta primera comunicación mencionando con agradecimiento a Paul Bernays, cuyo apoyo y colaboración han sido esenciales para la realización y el desarrollo de las ideas que aquí hemos expuesto.

Los fundamentos lógicos de las matemáticas

Mis investigaciones acerca de los nuevos fundamentos de las matemáticas[1] tienen como propósito principal eliminar de manera definitiva cualquier duda en relación a la confiabilidad de la inferencia matemática. La necesidad de una investigación de este tipo se nos hace patente cuando observamos cuán diversas e imprecisas son las ideas que han surgido en torno de esta problemática, inclusive las formuladas por algunos de los más notables matemáticos. Recordemos también que ciertas conclusiones e inferencias tenidas entre las más seguras han sido rechazadas por algunos de los matemáticos más prestigiados de los últimos tiempos.

Una solución completa de estas dificultades de principio requiere de una teoría cuyo objeto de estudio sea la demostración matemática misma. Gracias a la valiosa y eficaz colaboración de Paul Bernays he logrado desarrollar una *teoría de la demostración*, de tal manera que, con ella resulta posible una fundamentación satisfactoria del análisis y de la teoría de conjuntos.

Más aún, creo que mis análisis me han llevado al punto de poder afirmar que también los problemas clásicos de la teoría de conjuntos, como el problema del continuo y otros de igual importancia abiertos en la lógica matemática, pueden atacarse provechosamente con mi teoría.

No es posible hacer en este lugar una exposición en detalle de la teoría con sus largos y penosos desarrollos. Sin embargo, el curso mismo de nuestra investigación ha permitido el surgimiento de una serie de

---

[1] *Cfr.* las conferencias sustentadas por el autor en Copenhage y Hamburgo, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1922 [Cap. III del presente volumen].

nuevas ideas, conexiones y dificultades que por sí mismas merecen nuestra atención. Me propongo discutir aquí uno de estos problemas, uno que, por lo demás, toca profundamente el núcleo mismo de mi teoría de la demostración.

Recordemos, en primer término, el axioma de elección. Este principio fue expuesto y formulado inicialmente por Zermelo quien basándose en él ha logrado ofrecer una genial demostración del buen orden del continuo[2]. Las objeciones que se han hecho en contra de esta prueba y en relación a los desarrollos dependientes de ella en la teoría de conjuntos se refieren fundamentalmente al principio de elección. En nuestros días es todavía muy frecuente poner en duda la validez del axioma de elección, aceptando al mismo tiempo el resto de los principios deductivos que son usuales en la teoría de conjuntos en general y en las demostraciones de Zermelo en particular.

En mi opinión, esta actitud es equivocada. El análisis lógico, tal y como éste se lleva a cabo en mi teoría, muestra que la idea fundamental que subyace al axioma de elección es un principio lógico general que resulta necesario e indispensable, inclusive para las cuestiones más elementales de la deducción matemática. Si logramos dar una base firme a estos primeros pasos tendremos también preparado el terreno para el axioma de elección. Mi teoría de la demostración permite ambas cosas.

La idea fundamental de mi teoría de la demostración es la siguiente: Todo lo que hasta ahora ha formado parte de las matemáticas se formaliza de manera estricta, de tal manera que la matemática real o la matemática en un sentido estricto [in engerem Sinne] se convierte en un conjunto de fórmulas. Éstas se diferencian de las fórmulas normales en las matemáticas solamente en que, además de los signos usuales, contienen también signos lógicos, en particular signos para la implicación ($\rightarrow$) y para la negación ($^{-}$)[3].

Ciertas fórmulas que sirven como base para el edificio formal de las matemáticas se llaman axiomas. Una demostración es una figura que debe

---

[2] E. Zermelo, "Beweis, daß jede Menge Wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen* 59, 1904. [N. de T.]

[3] En el escrito antes mencionado se evita este símbolo. No obstante, la exposición presente difiere ligeramente de la que se da en aquél y en ella el símbolo de negación no representa peligro alguno.

presentarse ante nosotros como algo intuitivo y consiste de inferencias realizadas conforme al esquema

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

donde en cada caso las premisas; esto es, cada una de las fórmulas correspondientes a $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ es, o bien un axioma, o se obtuvo por sustitución en un axioma, o bien coincide con la fórmula final $\mathfrak{T}$ de una inferencia cuyas premisas aparecen ya en la demostración, o por sustitución en esa fórmula final.

Una fórmula es demostrable si es o bien un axioma, o se obtuvo por sustitución de un axioma o cuando es la fórmula final de una demostración.

A la matemática real [eigentlich] así formalizada se añade una especie de nueva matemática, una metamatemática, necesaria para salvaguardar aquélla y en la que, en contraposición a los modos puramente formales de inferencia de la matemática real, la inferencia concreta es utilizada, pero únicamente para la prueba de consistencia de los axiomas. La metamatemática trabaja con las demostraciones de la matemática real y, en realidad, éstas constituyen su objeto de investigación.

Las matemáticas en general se desarrollan entonces por medio de una transición constante en dos sentidos: por una parte, obteniendo a partir de los axiomas nuevas fórmulas demostrables por medio de la inferencia formal; y, por la otra, añadiendo nuevos axiomas junto con la prueba de su consistencia por medio de inferencias concretas.

Los axiomas y teoremas, esto es, las fórmulas que surgen en estas transformaciones, son las representaciones [Abbilder] de las ideas que constituyen los procedimientos utilizados hasta ahora en las matemáticas, sin constituir ellos mismos verdades en un sentido absoluto. Como verdades absolutas han de considerarse más bien los resultados relativos a la demostrabilidad y a la consistencia de esos sistemas de fórmulas que se obtienen gracias a mi teoría de la demostración.

Este programa determina nuestra elección de axiomas para la teoría de la demostración. La lista de nuestros axiomas comienza con los siguientes:

I. Axiomas de la implicación

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(adición de una suposición)

2. $\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$
(supresión de suposiciones)

3. $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
(intercambio de suposiciones)

4. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
(eliminación de proposiciones)

II. Axiomas de la negación

5. $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$
(ley de la contradicción)

6. $(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}$
(principio del tercero excluido)

III. Axiomas de la igualdad

7. $a = a$

8. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$

IV. Axiomas numéricos

9. $a + 1 \neq 0$.

10. $\delta(a + 1) = a$

En relación a 9 es necesario tener presente que la negación formal de $a = b$, se escribe también $a \neq b$, y que, además, $a + 1 \neq 0$ es la negación formal de $a + 1 = 0$.

Con base en los axiomas 1-10 es fácil obtener todos los números enteros positivos, lo mismo que las ecuaciones numéricas válidas que a ellos se refieren. A partir de estas bases y haciendo uso de una lógica "finitista" al realizar consideraciones puramente intuitivas (entre las que, sin duda, hay que contar a la recursión y a la inducción intuitiva para totalidades finitas), es posible obtener la teoría elemental de los núme-

ros[4], sin que para ello se tenga que recurrir a modos de inferencia dudosos o de alguna manera problemáticos.

Los teoremas obtenidos de acuerdo con este punto de vista tienen, todos ellos, un carácter finitista. Es decir, puede llegarse concretamente [inhaltlich] a los pensamientos que representan, sin recurrir a ningún axioma, considerando solamente totalidades finitas.

Pero en la teoría de la demostración queremos, además, ir más allá de la esfera de la lógica finitaria y obtener aquellos teoremas que representan a los teoremas transfinitos de la matemática usual. En nuestra opinión, la verdadera fuerza y validez de la teoría de la demostración se pone de manifiesto precisamente porque con ella nos resulta posible dar una prueba de consistencia, una vez que hemos aceptado ciertos axiomas adicionales de carácter transfinito.

¿En qué momento se trasciende por primera ocasión la esfera de lo intuitivo y finito? Evidentemente, cuando nos servimos de los conceptos "*todo*" y "*existe*". Lo característico de estos conceptos es lo siguiente. La afirmación de que *todos* los objetos de una totalidad finita dada de la que se puede tener una visión completa poseen una cierta propiedad es equivalente a la yuxtaposición de varios enunciados particulares por medio de la palabra "y". Afirmar que todos los asientos de este auditorio son de madera equivale a decir: este asiento es de madera y ese asiento es de madera y ... y el asiento de allá es de madera.

De manera análoga, la afirmación de que en una totalidad finita *existe* un objeto con una cierta propiedad es equivalente a una composición de enunciados particulares por medio de la palabra "o". Por ejemplo, el enunciado de que entre estos gises hay uno rojo equivale a decir: este gis es rojo o ese gis es rojo o...o el gis de allá es rojo.

Con base en lo anterior podemos concluir la validez de la siguiente versión del principio del *tertium non datur* para totalidades finitas: o bien todos los objetos poseen una cierta propiedad, o bien existe entre ellos uno que no la posee. Al mismo tiempo, utilizando los signos corrientes de cuantificación universal y existencial –"para toda *a*": (a); no para toda *a*: $(\overline{a})$ "existe una *a*": $(\mathsf{E}\,a)$; "no existe ninguna *a*": $(\overline{\mathsf{E}}\,a)$– obtenemos la validez estricta de las equivalencias

[4] En la exposición definitiva de nuestra teoría, la fundamentación de la teoria elemental de los números se da también por medio de axiomas. Por razones de brevedad nos referiremos aquí a la fundamentación intuitiva directa.

$$(\overline{a})A(a) \text{ eq. } (\mathrm{E}a)\overline{A}$$

y de

$$(\overline{\mathrm{E}a})A(a) \text{ eq. } (a)\overline{A}(a)$$

donde $A(a)$ representa un enunciado con una variable a, esto es, un predicado.

Ahora bien, es usual en las matemáticas suponer sin más la validez de estas equivalencias, inclusive cuando se habla de totalidades infinitas de individuos. Con ello, sin embargo, hemos abandonado el terreno de lo finito, adentrándonos en la esfera de los modos de las inferencias transfinitas.

Por lo demás, cuando en la esfera de lo infinito utilizamos sin reparos de ninguna índole un procedimiento válido en el terreno de lo finito, lo que estamos haciendo es, en realidad, abrir de par en par las puertas para que en nuestras consideraciones se deslicen errores. De hecho, aquí interviene la misma fuente de errores que nos es familiar en el análisis: así como allí la transposición de los teoremas válidos para sumas y productos finitos es lícita para sumas y productos infinitos sólo cuando una inspección sobre la convergencia garantiza las inferencias, las sumas y los productos lógicos infinitos

$$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3 \,\&\, \ldots,$$

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots,$$

no deben ser tratados como si fueran finitos, a no ser que la teoría de la demostración lo permita.

Consideremos las equivalencias que hemos establecido un poco antes. Cuando se considera una infinidad de objetos, ni la negación del juicio general $(a)Aa$ ni la negación del juicio existencial $(\mathrm{E}a)Aa$ tienen, en principio, un contenido preciso. En ocasiones, sin embargo, pueden adquirir un sentido, por ejemplo, cuando la afirmación $(a)Aa$ es contradicha por un contraejemplo, o cuando a partir de la suposición $(a)Aa$ o de $(\mathrm{E}a)Aa$ se deriva una contradicción. Sin embargo, estos casos no se oponen por contradicción, pues aunque $A(a)$ no sea válido para toda a, todavía no sabemos que realmente haya un objeto con la propiedad $\overline{A}$. Por razones análogas, tampoco podemos decir sin más que o bien $(a)Aa$ es válido, o bien que $(\mathrm{E}a)Aa$ lo es, o bien que estas afirmaciones exhiben realmente una contradicción. Las expresiones "hay" [es gibt] y "*se presenta, aparece*" [es liegt vor] tienen

obviamente el mismo significado cuando se habla de totalidades finitas. En relación a totalidades infinitas solamente el segundo de estos conceptos tiene cierta claridad.

Vemos así que para los propósitos de una fundamentación estricta de las matemáticas, los modos de inferencia usuales en el Análisis ciertamente no pueden suponerse como algo lógicamente evidente. Más bien, nuestra tarea consiste precisamente en indagar por qué y en qué medida la aplicación de modos de inferencia transfinitos, tal y como éstos se presentan en el Análisis y en la teoría de conjuntos, nos permite obtener siempre resultados correctos. El manejo libre de lo transfinito y su entero dominio y control deben tener lugar a partir de lo finito. ¿Cómo es posible la solución de este problema?

De acuerdo con nuestros propósitos iniciales, añadiremos a los cuatro grupos de axiomas que hasta ahora hemos presentado aquellos que expresan los modos de inferencia transfinita. Estos se designan en el lenguaje corriente por medio de frases como "*todos*", "*hay*", "*tercero excluido*", "*inducción completa*", "*principio de Aristóteles*", "*de la existencia*", "*de la reducción*", "*de la completud*" y "*de elección*".

Voy a servirme de la idea que subyace al principio de elección para introducir una función lógica

$$\tau(A) \text{ o bien } \tau(A(a)),$$

que asigna a cada predicado $A(a)$, esto es, a cada enunciado con una variable a, un objeto definido $\tau(A)$. Más aún, esta función τ debe satisfacer el siguiente axioma:

V. Axioma de transfinitud

11. $A(\tau A) \rightarrow A(a)$.

Expresado en el lenguaje común este axioma nos dice que cuando un predicado A se aplica al objeto τA, también se aplica a todo objeto a. La función τA es una función individual definida de una sola variable A de predicados. Podemos llamarla la función transfinita, dando al mismo tiempo al axioma 11 el nombre de *axioma de transfinitud*. Para aclarar su contenido, tomemos, por ejemplo, en lugar de A el predicado "ser sobornable". Tenemos entonces que τA designa a una persona definida, con un sentido de la honestidad tan inquebrantable que del hecho de que ella resultase sobornable se seguiría que toda persona lo sería igualmente.

El axioma V de transfinitud debe verse como el origen de todos los conceptos, principios y axiomas transfinitos. Si, por ejemplo, añadimos los

VI. Axiomas definitorios de los cuantificadores universal y existencial

$$A(\tau A) \rightarrow (a)A(a),$$

$$(a)A(a) \rightarrow A(\tau A),$$

$$A(\tau A) \rightarrow (\mathrm{E}a)A(a),$$

$$(\mathrm{E}a)A(a) \rightarrow A(\tau A).$$

la totalidad de los principios puramente lógicos y transfinitos que hemos mencionado se obtendrían como teoremas; esto es,

$$(a)A(a) \rightarrow Aa$$

(Principio Aristótelico)

$$A(a) \rightarrow (\mathrm{E}a)Aa$$

(Principio Existencial)

$$(\bar{a})Aa \rightarrow (\mathrm{E}a)\bar{A}a,$$

$$(\mathrm{E}a)\bar{A}a \rightarrow (\bar{a})Aa,$$

$$(\overline{\mathrm{E}a})Aa \rightarrow (a)\bar{A}a,$$

$$(a)\bar{A}a \rightarrow (\overline{\mathrm{E}a})Aa.$$

Por medio de estas últimas cuatro fórmulas es posible demostrar la validez de las equivalencias anteriormente establecidas para totalidades finitas, lo mismo que el principio del tercero excluido para totalidades infinitas[5]. De esta manera, vemos que todo lo que hasta aquí hemos expuesto depende de la demostración de la consistencia de los axiomas I-V (1-11).

La idea fundamental que subyace a una prueba de esta índole es siempre la misma. Suponemos que tenemos una demostración concreta

[5] Estoy en deuda con P. Bernays por haberme hecho ver que la fórmula 11 basta para la derivación de todas estas fórmulas.

[konkret] dada como figura, con la fórmula final $0 \neq 0$. A este caso puede reducirse ciertamente la existencia de una contradicción. Una vez hecho esto mostramos por medio de una consideración finitista concreta que esto último no puede constituir una demostración que satisfaga nuestras exigencias.

Debemos ofrecer, en primer lugar, una demostración de la consistencia de los axiomas I-IV (1-10). El procedimiento consiste en modificar sucesivamente la demostración que hemos supuesto como existente, de acuerdo con los siguientes criterios:

1. La demostración puede transformarse por medio de la repetición y eliminación de fórmulas para obtener una demostración en la que para cada fórmula haya una y sólo una fórmula "sucesora", a cuyo surgimiento contribuya. De este modo, la demostración puede ser analizada en líneas [Fäden] que partiendo de los axiomas desembocan en las fórmulas terminales.

2. Las variables que intervienen en la demostración pueden ser eliminadas.

3. Puede lograrse que en cada fórmula únicamente aparezcan, aparte de los símbolos lógicos, los numerales

$$0\,,\,0+1\,,\,0+1+1\,,\,\ldots\,,$$

de tal manera que cada fórmula de la demostración se convierta en una fórmula "numérica".

4. Toda fórmula se convierte en una cierta "forma normal" lógica.

Una vez que estas operaciones se han efectuado para cada fórmula de la demostración, un control directo sobre ella es posible. Es decir, en un cierto sentido (aún por precisarse), será posible determinar si la demostración es "correcta" o "incorrecta". Si la demostración considerada satisface todas nuestras exigencias, toda fórmula en ella deberá aprobar, a su vez, este requisito, por lo que lo mismo tendría que ocurrir con la fórmula terminal $0 \neq 0$, lo que claramente no es el caso. Con ello se habría demostrado la consistencia de los axiomas de los grupos I-IV (1-10). La prueba detallada de esto, que aquí hemos solamente bosquejado, rebasa evidentemente los límites de una conferencia.

En nuestro caso, sin embargo, se hace urgente ofrecer una demostración de la consistencia del axioma V (11), pues es gracias a él que pueden justificarse en las matemáticas los modos de inferencia transfinitos.

Quisiera desarrollar con cierto detalle las ideas centrales de esta demostración en el primero y más sencillo de los casos.

Este primer caso se presenta ante nosotros tan pronto como extendemos nuestra teoría de los números, que hasta ahora ha mantenido un carácter estrictamente finito. Llevamos a cabo esto tomando en el axioma V (11) a los objetos a como numerales, esto es, como los números enteros positivos, incluyendo al 0, y a los predicados $A(a)$ como ecuaciones $f(a) = 0$, donde f es una función numérica común. La función lógica τ asigna a cada predicado un objeto, es decir, a cada función matemática f un número. τ se convierte entonces en una función de función numérica ordinaria, de tal manera que si f es una función definida, τ es un número definido. Si llamamos $\tau(f)$ a éste,

$$\tau(f) = \tau_a(f(a) = 0),$$

el axioma V (11) se convierte en el axioma

12. $f(\tau(f)) = 0 \rightarrow f(a) = 0$.

La propiedad de la función de función $\tau(f)$ representada en esta forma encuentra su realización mas sencilla cuando entendemos por $\tau(f)$ el número 0 en cuanto se satisface la ecuación $f(a) = 0$ para cada a, tomando $\tau(f)$ como el primer número a para el que $f(a) \neq 0$. De no ser así, $\tau(f)$ es una función transfinita y pertenece precisamente a la clase de aquellas que Brouwer y Weyl consideran ilícitas. Sin embargo, lo decisivo aquí es la demostración de que añadir el axioma 12 a los axiomas 1-10 no conduce a contradicciones.

Recordemos, para este fin, la prueba de la consistencia de los axiomas 1-10 y tratemos de extenderla al caso que nos ocupa. Hay que considerar ahora una nueva dificultad que consistiría en que en la demostración a la que nos enfrentamos aparece el signo $\tau(f)$, pudiéndose reemplazar la variable funcional f por funciones especiales cualesquiera φ, φ', ...

Por el momento, sin embargo, y en aras de la facilidad y la simplicidad, supondremos que hay una única función especial φ de ese tipo como posible reemplazo para f. De esta manera, la prueba en cuestión puede, en última instancia, transformarse en una demostración en la que, además de signos lógicos y numerales, sólo aparece $\tau(\varphi)$, en donde φ representa una función especial en cuya definición no se ha utilizado τ.

Dada esta demostración, procedemos a aplicar en orden las siguientes operaciones:

1. Reemplazamos uniformemente, y en cierta forma de manera provisional, a modo de ensayo, $\tau(\varphi)$ por el numeral 0. Nuestra demostración se convierte entonces en una sucesión de fórmulas "numéricas". Todas estas fórmulas son "correctas" en el sentido anterior, posiblemente con la excepción de aquellas que resultan del axioma 12. Ahora bien, cuando tomamos φ por f, si se hace la sustitución correspondiente para a y se pone el numeral 0 en lugar de $\tau(\varphi)$, las únicas fórmulas que se derivan del axioma 12 son de la forma

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \varphi(\zeta) = 0.$$

Como en esta expresión ζ y φ representan, respectivamente, un numeral y una función definida recursivamente —la definición recursiva puede incorporarse fácilmente a nuestro formalismo— $\varphi(\zeta)$ se reduce también a un numeral. Se trata entonces esencialmente de ver si en estas fórmulas $\varphi(\zeta)$ se convierte en el numeral 0 después de esta reducción a un numeral, o si en algún momento a partir de $\varphi(\zeta)$ surge un numeral distinto de 0. En el primer caso habremos demostrado la consistencia, porque entonces todas las fórmulas que se siguen del axioma 12 son correctas. La sucesión de fórmulas que obtuvimos de la demostración se convierte nuevamente en una demostración en la que el control paso a paso garantiza que todas las fórmulas son correctas, por lo que la fórmula incorrecta $0 \neq 0$ no puede ser una fórmula terminal.

2. En el segundo caso, hemos obtenido una ζ, tal que

$$\varphi(\zeta) = 0$$

resulta una fórmula falsa. Procedemos después de la siguiente manera en relación a la demostración que aquí se nos presenta.

Sustituimos de manera uniforme en la prueba el numeral ζ, en lugar de 0, por $\tau(\varphi)$. Las fórmulas que se siguen del axioma 12 tienen entonces, en su totalidad, la forma

$$\varphi(\zeta) = 0 \rightarrow \varphi(\text{[illegible]}) = 0.$$

Se trata, además, de fórmulas siempre verdaderas, puesto que la fórmula que antecede al signo de implicación es falsa. Nuevamente en la demostración aparecen sólo fórmulas numéricas verdaderas, por lo que la fórmula final no puede ser $0 \neq 0$.

Con ello hemos dado una demostración completa de la consistencia de la función transfinita $\tau(f)$. Pero, a la vez, obtenemos el principio del tercero excluido para el concepto de una serie numérica infinita, como la que representa la variable numérica en f. Es decir, con base en los axiomas de la negación (II.5 y 6), la negación formal es equivalente a lo opuesto contradictorio. Como $\tau(f) \neq 0$ es la negación formal de $\tau(f) = 0$, por VI, $\tau(f) \neq 0$ y $(\mathsf{E}a)(f(a) \neq 0)$; y $\tau(f) = 0$ y $(a)(f(a) = 0)$ son respectivamente equivalentes.

La solución que nuestra teoría de la demostración da a este problema puede interpretarse como sigue. Nuestro pensamiento es finito, y cuando pensamos tiene lugar un proceso finito. Esta verdad, evidente en sí misma, se incorpora en la teoría de la demostración de la manera siguiente. Si en algún sitio surgiera una contradicción, al tiempo que nos percatamos de ella, tendría que realizarse una elección correspondiente entre la totalidad infinita de cosas involucradas en ella. De acuerdo con esto, en la teoría de la demostración no se afirma que pueda encontrarse siempre un objeto entre la infinidad de objetos, sino tan sólo que puede procederse siempre sin riesgo de error, como si, en efecto, se hubiera llevado a cabo la elección.

Podemos conceder que Weyl está en lo justo cuando habla de la existencia de un argumento circular, pero éste no constituye, en todo caso, un círculo vicioso. Más bien, la utilización del principio del tercero excluido no representa peligro alguno.

En la teoría de la demostración, a los axiomas finitos se añaden los axiomas y las fórmulas transfinitos, de manera análoga a como en la teoría de los números complejos a los elementos reales se añaden los imaginarios, y a como en la geometría a las figuras reales se añaden las imaginarias. Se puede, en verdad, afirmar que en la teoría de la demostración el éxito de esta manera de proceder es el mismo que en los casos mencionados, a saber: la simplicidad y el carácter deductivamente cerrado de la teoría.

De acuerdo con lo que hasta ahora hemos expuesto, la función transfinita $\tau(f)$ puede aplicarse sin restricciones en las matemáticas, tanto en la definición de funciones y construcción de nuevos conceptos, como en la realización de las demostraciones matemáticas.

Un ejemplo de definición de función nos lo proporciona la función

$$\varphi(a) = [a^{\sqrt{a}}],$$

en donde el signo de la derecha toma los valores 0 y 1 respectivamente, según que $a^{\sqrt{a}}$ sea un número racional o irracional.

Por lo que a su uso en las demostraciones se refiere, las pruebas que se encuentran en la literatura permiten reconocer fácilmente si en ellas se utiliza o no de manera esencial una función transfinita. En realidad, las dos demostraciones distintas, que nosotros mismos hemos ofrecido, del carácter finito de los sistemas de invariantes completos, constituyen ejemplos adecuados de lo anterior. En el primer caso, se utilizan modos de deducción transfinitos, mientras que en el segundo no. La primera de las pruebas de la finitud del sistema completo de invariantes presentada pertenece al tipo de demostraciones en las que los modos de deducción transfinita son esenciales e imprescindibles.

Puede suponerse, por supuesto, que un teorema finitista se puede demostrar siempre sin recurso alguno a modos transfinitos de deducción, como ocurre, por ejemplo, con el teorema de la finitud de un sistema completo de invariantes, según lo muestra la segunda de las pruebas mencionadas. Sin embargo, esta afirmación pertenece al tipo de afirmaciones de que toda proposición matemática en general o bien puede demostrarse o bien refutarse.

P. Gordan encuentra una cierta obscuridad en los modos de deducción transfinitos utilizados en la primera de nuestras demostraciones acerca de los invariantes. La manera de poner de manifiesto su insatisfacción es llamar a la prueba "teológica". Gordan modifica después la exposición del argumento, incorporando su simbolismo y creyendo, con ello, haber despojado a la demostración de su carácter "teológico". Sin embargo, lo único que logra es ocultar el modo de deducción transfinita en el formalismo de su simbolización[6].

---

[6] A finales de 1888, Hilbert ofreció una demostración indirecta del problema de Gordan acerca de la existencia de una base finita para la generación de invariantes en general (sin importar el número de variables que contengan). Con ello, Hilbert asumía una posición definida en relación al problema de la naturaleza de la existencia en matemáticas, específicamente, en oposición a Kronecker, para quien existencia implica construcción. El teorema de Hilbert fue impugnado, entre otros, por Gordan mismo ("Eso no es matemáticas, sino teología"). Sin embargo, en 1892 y apoyándose en su primer teorema (y en una idea de Kronecker en la teoría algebraica de los campos numéricos), Hilbert encontraría una prueba constructiva de tal resultado, dando con ello, de paso, un impulso definitivo al uso de métodos existenciales indirectos (reducción al absurdo) en las matemáticas (*Cfr.* C. Reid, *Hilbert*, Springer Verlag, Berlin, 1970, Cap. V). [N. de T.]

Sirviéndonos del mismo método que hemos utilizado para demostrar la consistencia de una función de función transfinita $\tau(f)$, podemos probar igualmente la consistencia de la función de funciones $\mu(f)$. Esta función —al igual que $\tau(f)$— tiene la propiedad de ser 0 cuando el argumento se anula [verschwindet] para todas las variables, y toma, por otra parte, el mínimo valor para el que $f(a)$ difiere de 0, en el caso contrario.

Por medio de esta función $\mu(f)$ se obtiene el principio de inducción completa

$$A(0) \to (a)(A(a) \to A(a+1)) \to A(a)$$

como teorema.

El reconocimiento de esto último, en una exposición concreta, constituye el resultado principal del ensayo de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?*

Para fundamentar el análisis, definimos el número real z que se encuentra entre 0 y 1 por medio de una fracción binaria y a ésta a través de una función $\varphi(n)$, a la que llamamos el valor de posición [Stellenwert], y que sólo puede ser 0 o 1:

$$z = 0 . a_1 a_2 a_3 \ldots \qquad (a_n = f(n)).$$

Un ejemplo de fracción binaria definida de manera transfinita es el siguiente

$$0 . [2^{\sqrt{2}}][3^{\sqrt{3}}][4^{\sqrt{4}}] \ldots .$$

Esta expresión representa un número real bien definido, aunque, de acuerdo con el estado actual de la investigación, no pueda calcularse ni siquiera la primera fracción binaria.

El fundamento del análisis es el teorema de la cota superior. La función transfinita τ permite, en efecto, la demostración de la existencia de esa cota superior para cualquier sucesión de números reales.

Para percatarse de esto, conviene, en primer lugar, introducir los signos lógicos: "&" y "V" (& para "y" y V para "o"). Esto lo realizaremos aquí reduciendo estos signos a los símbolos lógicos que hemos utilizado hasta ahora, $\to$ y $\overline{}$.

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$$

representan lo mismo, respectivamente, que

$$\overline{\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{B}}} \text{ y } \bar{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{B}$$

Estipulamos ahora que $\mathfrak{R}f$ es es una abreviatura de

$$(a)(fa = 0 \vee fa = 1) \& (a)(\mathrm{E}b)(f(a+b) = 1).$$

Es decir, $\mathfrak{R}f$ expresa que la función fa representa un número real en el intervalo semicerrado (0 , 1] por medio de la fracción binaria infinita

$$0 . f(1) f(2) f(3) \ldots$$

Una sucesión $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ de números reales se representa entonces por medio de una función $\varphi(a, n)$ en la cual la fórmula $\mathfrak{R}\varphi(a, n)$ resulta demostrable para todo entero [positivo] n. El curso adicional de la demostración tiene lugar de acuerdo con la siguiente idea básica:

Consideremos el esquema

$$\zeta_1 = 0 . \varphi(1,1)\varphi(2,1)\varphi(3,1)\ldots$$

$$\zeta_2 = 0 . \varphi(1,2)\varphi(2,2)\varphi(3,2)\ldots$$

$$\zeta_3 = 0 . \varphi(1,3)\varphi(2,3)\varphi(3,3)\ldots$$

. . . .

Fijémonos, en primer lugar, en las cifras de la primera columna después del punto. Si todas éstas son 0; es decir, si $\varphi(1, n) = 0$ para toda n, tómese $\psi(1) = 0$. De no ser así, $\psi(1) = 1$.

Si ahora en la segunda columna son 0 todas aquellas cifras que tienen la propiedad de que la cifra de la primera columna de la misma hilera horizontal es $\psi(1)$, tómese $\psi(2) = 0$; de no ser así, $\psi(2) = 1$.

Si en la tercera columna son 0 todas las cifras que tienen la propiedad de que cada una de las cifras de la primera y la segunda columnas de la misma hilera horizontal son $\psi(1)$ y $\psi(2)$ respectivamente, tómese $\psi(3) = 0$, si no, tómese $\psi(3) = 1$, etc.

Con base en esta observación podemos dar una definición precisa de la cota superior $\psi(a)$ de la sucesión $\varphi(a, n)$ de números reales por medio de la siguiente recursión simultánea:

$$\chi(0, n) = 0$$

$$\psi(a+1) = \pi_n \{ \chi(a, n) = 0 \rightarrow \varphi(a+1, n) = 0 \}$$

$$\chi(a+1, n) = \chi(a, n) + \iota(\psi(a+1), \varphi(a+1, n));$$

donde $\iota(a, b)$ es la función de a y b que representa 0 ó 1, según que $a = b$ ó $a \neq b$, y donde π_n es la función transfinita definida por medio del siguiente axioma

$$(n)\,\mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{A}n) = 0,$$

$$(\bar{n})\,\mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{A}n) = 1;$$

O, expresado con palabras: $\pi_n(\mathfrak{A}n)$ es 0 ó 1, según que el enunciado $\mathfrak{A}$ correspondiente sea válido o no para todo n.

Puede demostrarse estrictamente, en el sentido de mi teoría de la demostración, que $\mathfrak{R}\psi$ es válida y que, además, el número real $\psi(n)$ tiene la propiedad de la cota superior, donde la relación "menor" puede definirse para dos números reales cualesquiera f y g por medio de la fórmula

$$(\mathrm{E}a)\,\{(b)(b < a \rightarrow fb = gb)\ \&\ fa = 0\ \&\ ga = 1\}$$

Considérese ahora en lugar de una sucesión de números reales un conjunto cualquiera de tales números (por ejemplo, tomando como dada para la variable funcional f un enunciado definido $\mathfrak{R}(f)$ que, por una parte, caracterice tanto a f como a una función que represente a un número real y que también caracterice, por la otra, a los números reales del conjunto). La cota superior $\psi(a)$ de este conjunto $\mathfrak{R}(f)$ de números reales se obtiene entonces por medio de la siguiente recursión simultánea:

$$\chi(0, f) = 0$$

$$\psi(a+1) = \pi_f \{\mathfrak{R}f \rightarrow (\chi(a, f) = 0 \rightarrow f(a+1) = 0)\}$$

$$\chi(a+1, f) = \chi(a, f) + \iota(\psi(a+1), f(a+1));$$

donde π_f es la función transfinita definida por los axiomas

$$(f)\,\mathfrak{A}(f) \rightarrow \pi_f(\mathfrak{A}f) = 0,$$

$$(\bar{f})\,\mathfrak{A}(f) \rightarrow \pi_f(\mathfrak{A}f) = 1.$$

Para terminar, me gustaría ilustrar otra aplicación, esta vez al principio de elección de Zermelo para conjuntos de números reales.

Anteriormente teníamos que un conjunto de números reales f estaba dado por un enunciado definido $\nu(f)$, con f como variable funcional. Añadimos ahora los axiomas

$$\mathfrak{R}f \rightarrow \nu(f) = 1$$

$$\overline{\mathfrak{R}f} \rightarrow \nu(f) = 0$$

cuya consistencia puede reconocerse con facilidad. De este modo, el conjunto se encuentra definido por la función de función $\nu(f)$, que tiene el valor 1 para el número real f del conjunto y el valor 0 para todos los demás números reales f. A partir de la fórmula

$$\mathfrak{R}f \rightarrow \mathfrak{R}f,$$

que es válida para $\mathfrak{R}$, se obtiene

$$\nu(f) = 1 \rightarrow \mathfrak{R}f.$$

ν es una función de función especial. Sea r la variable correspondiente; es decir, sea r la variable de la función de función cuyo argumento es una función monádica ordinaria.

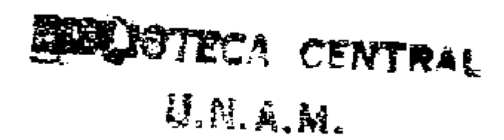
Un conjunto especial de conjuntos de números reales es entonces representado por un enunciado especial $\mathfrak{M}(r)$, en el que aparece r y para la cual es válida la fórmula:

$$\mathfrak{M}(r) \,\&\, (rf = 1) \rightarrow \mathfrak{R}f$$

Supongamos que este conjunto de conjuntos tiene la propiedad de que cualquier elemento suyo que sea un conjunto de números reales es no vacío, i.e. contiene por lo menos un número real. O, expresado formalmente,

$$\mathfrak{M}(r) \rightarrow (\mathsf{E}f)(r(f) = 1).$$

Definimos ahora una función transfinita τ_f como antes lo hemos hecho con τ_a, con la diferencia de que en lugar de las variables numéricas a tomamos de antemano una variable funcional f. Es decir, τ_f se define por medio del axioma



$$(12^*) \qquad r(\tau_f(r)) = 0 \rightarrow r(f) = 0$$

que corresponde a nuestro axioma 12 para τ_a y que se obtiene directamente del axioma V (11) cuando se toman en éste las funciones f como objetos y las ecuaciones $r(f) = 0$ como predicados.

En todo esto, τ_f representa siempre una función, mientras que el argumento es una función de función r.

Se obtienen así los siguientes teoremas:

$$(\mathsf{E} f)(r(f) = 1) \rightarrow (\bar{f})\ (rf = 0),$$

$$(\bar{f})\ (rf = 0) \rightarrow r(\tau_f(r)) \neq 0,$$

$$r(\tau_f(r)) \neq 0 \rightarrow r(\tau_f(r)) = 1,$$

de lo que se sigue

$$\mathfrak{M}(r) \rightarrow r(\tau_f(r)) = 1,$$

Es decir, para cada elemento r del conjunto $\mathfrak{M}(r)$ se encuentra asociada una función numérica $\tau_f(r)$. Esta función representa, además, un número real —porque de una fómula anterior se sigue inmediatamente $\mathfrak{R}(\tau_f(r))$.

Las funciones $\tau_f(r)$ forman un conjunto, pues para obtener un enunciado que defina la totalidad de estas funciones —las llamamos $g(a)$— es necesario solamente formular que cada una de ellas coincide con el representante $\tau_f r$ de un conjunto r de $\mathfrak{M}$, tal y como esto se expresa en la fórmula

$$(\mathsf{E} r)\{\mathfrak{M}(r) \,\&\, (a)(g(a) = \tau_f r(a))\}$$

De esta manera, de acuerdo con el método de representación original, tenemos aquí un conjunto. Con ello hemos demostrado el principio de elección de Zermelo para conjuntos de conjuntos de números reales.

Por lo demás, debido a la aparición del símbolo $(\mathsf{E} r)$, resulta necesario todavía demostrar la consistencia de la función transfinita $\tau_f(r)$, que pertenece a un tipo nuevo de variable r. Esta prueba tiene

que darse, al igual que la demostración para π_n y π_f, de acuerdo con el modelo de la función transfinita τ_a.

Queda pendiente todavía la tarea de llevar a la práctica en detalle las ideas básicas que aquí hemos delineado. La realización de ello permite la fundamentación completa del análisis, a la vez que sienta las bases para una fundamentación de la teoría de conjuntos misma.

Acerca del infinito

Sin lugar a dudas, el análisis matemático debe a la profunda crítica de Weierstraß su fundamento definitivo. Con sus precisas definiciones de nociones como mínimo, función y derivada, Weierstraß ha contribuido de manera fundamental a subsanar las deficiencias que permeaban hasta entonces el cálculo infinitesimal, al eliminar ideas poco claras y abstrusas acerca de lo infinitamente pequeño y al superar, de una vez por todas, las dificultades que surgen en relación a este concepto.

El acuerdo total y la seguridad completa que en nuestros días reinan en el análisis en lo relativo a las argumentaciones que involucran el concepto de número irracional y, en general, de límite, se deben en gran medida al trabajo científico de Weierstraß. Y algo parecido puede afirmarse acerca de la teoría de las ecuaciones diferenciales e integrales. A pesar de las aplicaciones verdaderamente audaces que en ella se hacen de una gran gama de combinaciones de superposición, yuxtaposición y encaje de límites, es posible constatar la existencia de una unanimidad esencial al respecto, y el logro de ésta se debe fundamentalmente a Weierstraß.

Sin embargo, la fundamentación weierstrassiana del cálculo infinitesimal se encuentra todavía lejos de representar el punto final de la discusión acerca de los fundamentos del análisis.

La razón de ello reside en el hecho de que el significado del *infinito* para las matemáticas aún no ha sido elucidado de una manera plenamente satisfactoria. Por supuesto, al transformar los enunciados que involucran lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande en afirmaciones que se refieren a relaciones entre magnitudes finitas, Weierstraß se encuentra en condiciones de desterrar esos conceptos del análisis. Sin embargo, el infinito continúa estando presente cuando hablamos de las sucesiones

numéricas infinitas que definen a los números reales, al igual que en la noción misma de un sistema de tales números, al que normalmente se considera como una totalidad acabada y completa.

Las formas de la inferencia lógica en las que esta concepción del infinito se pone de manifiesto (por ejemplo, cuando se habla de *todos* los números reales que poseen una cierta propiedad, o de que *existen* números reales con tales y cuales características) son requeridas y utilizadas de manera irrestricta en el análisis de Weierstraß.

Debido a esta circunstancia, el infinito ha podido deslizarse, de manera disimulada, en la teoría de Weierstraß sin ser afectado en lo esencial por su crítica.

De todo ello se sigue la imperiosa necesidad de elucidar finalmente, de manera definitiva y en el sentido que acabamos de indicar, el *problema del infinito*. Ahora bien, así como en los procesos de *paso al límite* del cálculo infinitesimal se demuestra que el infinito en el sentido de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande no es sino una simple forma de hablar, también debemos mostrar que el infinito, en tanto que totalidad infinita, tal y como ésta se pone de manifiesto en los principios de inferencia usuales, es algo meramente aparente.

De manera análoga a como las operaciones con lo infinitamente pequeño fueron sustituidas por procesos en el ámbito de lo finito con los que podemos llegar exactamente a los mismos resultados y a las mismas y elegantes relaciones formales, debemos ahora reemplazar las argumentaciones con lo infinito por procesos finitos que nos conduzcan a lo mismo, es decir, que hagan posibles las mismas demostraciones y los mismos métodos de obtención de fórmulas y teoremas.

Es ésta precisamente la intención principal de mi teoría. Es decir, mi teoría se propone como objetivo central conferir una seguridad definitiva al método matemático, una seguridad a la que el período crítico del cálculo infinitesimal no pudo llegar. En otras palabras, nuestra meta es concluir la tarea que Weierstraß intentaba llevar a cabo con la fundamentación del análisis y para la cual dio un paso absolutamente necesario y fundamental.

Si queremos llevar a cabo una verdadera elucidación del concepto de infinito es necesario adoptar una perspectiva más general. La literatura matemática está plagada de absurdos y errores debidos, en gran medida, al infinito. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando a manera de condición restrictiva se afirma que en la matemática rigurosa, una demostración es aceptable únicamente cuando consta de un número

finito de inferencias. ¡Cómo si en alguna ocasión alguien hubiera sido capaz de llevar a cabo un número infinito de inferencias!

Pero también las viejas objeciones que habíamos considerado como algo ya superado se presentan nuevamente, ahora bajo una nueva vestimenta. Así, por ejemplo, se argumenta que aunque es posible la introducción de un concepto sin que ello represente peligro alguno, esto es, sin que dé lugar a contradicciones —y aun pudiendo probarlo— esto no basta como justificación. Pero, ¿no es esta precisamente la misma objeción que se hacía no hace mucho a los números complejos cuando se decía que aunque era claro que tenerlos no podía ser la causa de contradicciones, su introducción no era algo justificado porque, en realidad, las cantidades imaginarias no existen?

Ahora bien, si aparte de una prueba de consistencia ha de tener algún sentido el problema de la justificación de un procedimiento, lo único que esto puede significar es que ese procedimiento sea fecundo en resultados. De hecho, el éxito resulta en este contexto algo necesario, la instancia suprema a la que todo el mundo se somete.

Otro autor parece ver contradicciones, cual fantasmas, inclusive cuando nadie ha hecho ningún tipo de afirmaciones, esto es, en el mundo concreto de lo sensible, cuyo "funcionamiento consistente" se considera como una hipótesis especial.

Siempre he creído que lo único que puede dar lugar a contradicciones son las afirmaciones y las hipótesis, en tanto que conduzcan, por medio de inferencias, a otras afirmaciones, por lo que la idea misma de una contradicción entre los hechos me parece un ejemplo paradigmático de descuido conceptual y absurdo.

Todas estas observaciones tienen como sola intención hacer claro que la elucidación definitiva de la *naturaleza del infinito* es algo que va mucho más allá del ámbito de los intereses científicos particulares, algo que, en realidad, se ha convertido en una *cuestión de honor para el entendimiento humano.*

Como ningún otro problema, el del infinito ha inquietado desde los tiempos más remotos el *ánimo* de los hombres. Ninguna otra *idea* ha sido tan estimulante y fructífera para el entendimiento. Pero, como ningún otro *concepto*, requiere de *precisión y esclarecimiento* satisfactorios.

Es necesario tener presente, ahora que nos abocamos a esta tarea de clarificación del infinito, el significado concreto que éste posee en la realidad.

Examinemos, en primer lugar, lo que la física nos dice al respecto.

La primera y más intuitiva impresión que tenemos de la naturaleza y la materia es la de algo continuo. Así, por ejemplo, si tenemos un trozo de metal o un cierto volumen de algún líquido, la idea que inmediatamente se nos impone es la de que se trata de algo que puede ser subdividido ilimitadamente y que cualquier porción del mismo por pequeña que sea posee también las mismas características.

Sin embargo, en todos los terrenos en los que la física de la materia ha logrado refinar adecuadamente sus métodos de investigación se ha topado con límites a esa divisibilidad y ha hallado que esos límites no residen en la insuficiencia de nuestros intentos, sino en la naturaleza misma de los objetos.

Podríamos entonces describir la tendencia dominante en la ciencia moderna como una especie de emancipación de lo infinitamente pequeño, de tal manera que en lugar del viejo principio de que *natura non facit saltus*, podríamos afirmar ahora precisamente lo contrario, esto es, que "la naturaleza sí da saltos".

Como se sabe, toda la materia se compone de pequeños bloques, los *átomos*, cuya combinación y unión da origen a la multiplicidad de los objetos macroscópicos. Sin embargo, la física no se ha detenido en la teoría atómica de la materia. A finales del siglo pasado aparece al lado de ésta una teoría a primera vista extraña, la teoría atómica de la electricidad. Hasta entonces se había pensado en la electricidad como en un fluido, teniéndosela, además, como el modelo de un agente de acción continua. La nueva concepción atomista la concibe en oposición a ello como algo conformado por *electrones* positivos y negativos.

Existe otra realidad, aparte de la materia y la electricidad, que la física considera y para la cual es también válida la ley de la conservación, a saber, la energía. Pero como ahora sabemos, ni siquiera ésta es susceptible, sin más, de una división infinita e irrestricta: Planck descubrió que la energía se presenta en *quanta*.

Podemos entonces concluir que en ninguna parte de la realidad existe un continuo homogéneo que pueda ser ilimitadamente divisible y que constituyera de algún modo una realización del infinito en la esfera de lo pequeño.

La divisibilidad infinita de un continuo es "exclusivamente" una operación del pensamiento, una idea que la observación de la naturaleza y la experimentación en la física y la química refutan.

La observación del universo como un todo constituye un segundo sitio en el que nos enfrentamos al problema del infinito en la naturaleza. La dificultad que aquí se nos plantea es la de examinar la extensión del mundo y determinar si en ella existe algo infinitamente grande.

Durante mucho tiempo se pensó que el universo era infinito. Hasta Kant —e inclusive después de él— el carácter infinito del espacio se tuvo como algo indubitable. La ciencia contemporánea, en especial la astronomía, ha planteado de nueva cuenta el problema, abordándolo esta vez no con los inadecuados recursos de la especulación metafísica, sino apoyándose en la experiencia y recurrriendo a las leyes de la naturaleza. Como resultado de este proceso se han hecho objeciones fundamentales en relación a la existencia del infinito.

La suposición de un espacio infinito es una consecuencia directa, necesaria, de la geometría *euclidiana*. Por sí misma, ésta representa un sistema conceptual consistente. Sin embargo, de ello no se sigue que este sistema sea de alguna manera aplicable a la realidad. Más bien, esta cuestión únicamente puede ser decidida por medio de la observación y la experiencia.

El intento de demostrar especulativamente el carácter infinito del espacio presenta igualmente una serie de evidentes errores. En efecto, a partir del hecho de que fuera de cualquier porción del espacio exista siempre otra, solamente se sigue que éste es ilimitado [unbegrenzt], pero de ninguna manera que sea infinito. Ilimitado y finito no son necesariamente incompatibles. Con la geometría *elíptica*, las matemáticas nos ofrecen el modelo natural de un mundo finito. Por lo demás, el abandono en la actualidad de la geometría euclidiana ha dejado de ser una especulación puramente matemática o filosófica, pues hemos llegado a esa decisión a partir de otro tipo de consideraciones que no tienen, en su origen, absolutamente ninguna conexión con el problema de si el mundo es o no finito.

Einstein ha hecho ver la necesidad de apartarse de la geometría euclidiana y ha abordado los problemas cosmológicos con base en su teoría de la gravitación. Con ello ha demostrado la posibilidad de un mundo finito, estableciendo también la esencial compatibilidad de los resultados de la astronomía con la suposición de un mundo elíptico.

Podemos entonces decir que hemos constatado el carácter finito de la realidad en dos direcciones, en la esfera de lo infinitamente pequeño y en la de lo infinitamente grande. Podría ocurrir, no obstante, que el

lugar propio y justificado del infinito no sea la realidad, sino *nuestro pensamiento.* Y podría muy bien resultar que en éste el infinito asuma una función conceptual absolutamente imprescindible.

Nuestro objetivo en lo que sigue es examinar lo que ocurre en las matemáticas con este concepto. Plantearemos para ello el problema, en primer lugar, en la esfera de lo que puede considerarse la criatura más pura e ingenua del espíritu humano, la teoría de los números.

Consideremos una cualquiera de entre la rica multitud de las fórmulas elementales. Por ejemplo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n + 1)\,(2n + 1)\,.$$

n puede ser reemplazado en ella por cualquier número entero (por ejemplo por el 2 o por el 5), por lo que esta fórmula contiene, en realidad, una *infinidad* de proposiciones. Es esto precisamente lo esencial de la misma, y es gracias a ello que puede representar la solución de un problema aritmético y requerir de un genuino argumento para su prueba, mientras que cada una de las ecuaciones numéricas específicas

$$1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11,$$

puede ser verificada directamente ejecutando las operaciones apropiadas, por lo que ninguna de ellas tiene, por sí misma, un interés esencial.

El útil e importante método de los *elementos ideales* nos ofrece una interpretación y una concepción enteramente distintas del concepto de infinito. Este método ha sido ya objeto de aplicaciones en la geometría plana elemental. En ésta, los puntos y las rectas del plano constituyen los únicos objetos reales originales y con una existencia verdadera. Para estos objetos resulta válido el axioma de conexión: a través de dos puntos cualesquiera pasa una y solamente una línea recta.

De esto último se obtiene como consecuencia que dos rectas se intersectan a lo más en un punto. Sin embargo, la proposición de que dos rectas se intersectan siempre en un punto no es verdadera, pues pueden muy bien ser paralelas.

Como sabemos, es precisamente gracias a la introducción de elementos ideales, esto es, a la introducción de puntos al infinito y de una recta al infinito que se logra que la proposición de que dos rectas se intersectan siempre en un solo punto resulte universalmente válida.

Los elementos ideales "al infinito" poseen la ventaja de simplificar considerablemente el sistema de las leyes de conexión, permitiendo al mismo tiempo una visión global del mismo. Por otra parte, es bien sabido que la simetría entre punto y recta hace posible obtener en la geometría un principio tan útil y fructífero como el de dualidad.

Otro ejemplo de la utilidad de los elementos ideales lo encontramos en las magnitudes *complejas* ordinarias del álgebra. Con ellas podemos simplificar los teoremas relativos a la existencia y el número de raíces de una ecuación.

Por lo demás y de igual manera que en la geometría se utiliza una infinidad de líneas paralelas entre sí para la definición de un punto ideal, también en la aritmética superior confluyen en un *número ideal* ciertos sistemas acerca de un infinito de números. Posiblemente esta es la aplicación más genial que se ha dado al principio de los elementos ideales en las matemáticas. Cuando algo como lo que acabamos de describir ha ocurrido en general dentro de un campo algebraico es fácil recuperar en él las sencillas y conocidas leyes de la divisibilidad para los enteros 1, 2, 3, 4, ... , con lo cual nos hallaríamos ya en el terreno de la aritmética superior.

Ocupémonos ahora del análisis, que bien podría ser considerado como la rama más ingeniosa y más refinadamente elaborada de las matemáticas. No es necesario señalar aquí el papel absolutamente fundamental que en él desempeña el infinito. En cierto sentido, el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito.

Los enormes e impresionantes avances llevados a cabo en el cálculo infinitesimal descansan en gran medida en la operación de sistemas matemáticos con una infinidad de elementos. Ahora bien, parecía bastante natural identificar infinito con "muy grande", por lo que no tardaron en aparecer las primeras contradicciones, las llamadas paradojas del cálculo infinitesimal, en parte ya conocidas por los sofistas desde la Antigüedad.

Un logro de suma importancia en este sentido fue el reconocimiento del hecho de que muchos principios válidos para la esfera de lo finito, *v.gr.* que la parte es siempre menor que el todo, la existencia de un mínimo

y un máximo, la posibilidad de cambiar el orden de los sumandos o de los factores, etc., no pueden trasladarse sin más al ámbito de lo infinito.

La elucidación completa de todas estas cuestiones se debe, como ya he mencionado al inicio de mi exposición, a Weierstraß. En nuestros días, el análisis representa, para el campo de estudio del que se ocupa, una guía imprescindible, al mismo tiempo que una herramienta de inmenso valor práctico para el manejo del infinito.

Sin embargo, por sí solo el análisis resulta insuficiente para proporcionarnos una visión de la más profunda esencia del infinito. Esta visión la encontramos más bien en la teoría de conjuntos de Georg Cantor, una disciplina mas cercana a un enfoque filósofico general que ubica todo el complejo de problemas relativo al infinito en una nueva perspectiva. Lo que aquí nos importa de ella es precisamente aquello que en verdad constituye su núcleo fundamental, esto es, la *teoría de los números transfinitos*. En mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general.

Si quisieramos dar expresión en pocas palabras a la nueva concepción del infinito introducida por Cantor, podríamos decir lo siguiente. En el análisis enfrentamos lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande solamente como un concepto límite [Limesbegriff]— algo que se encuentra en devenir, en surgimiento, algo que se está generando—. En otras palabras, en el análisis hablamos del infinito como de un *infinito potencial*. Pero el infinito verdadero, el infinito propiamente dicho es algo distinto. Es precisamente éste al que nos enfrentamos cuando, por ejemplo, consideramos la totalidad de los números enteros positivos $1, 2, 3, 4, \ldots$ como una unidad acabada, o cuando pensamos en los puntos de un segmento como una totalidad de objetos que tenemos ante nosotros como algo terminado. A esta forma del infinito se le conoce como el *infinito actual*.

Frege y Dedekind, ambos grandes investigadores de los fundamentos de las matemáticas, recurren, cada uno por su parte, al infinito actual con el objeto de dar a la aritmética una base puramente lógica independiente de toda intuición y toda experiencia y de deducirla exclusivamente a partir de ésta.

De hecho, en la teoría de Dedekind, los números finitos no se derivan de la intuición, sino que se obtienen puramente a partir de la lógica, haciendo uso esencial del concepto de conjunto infinito. El

desarrollo sistemático del concepto del infinito actual se debe, sin embargo, a Cantor.

Examinemos con cuidado los dos ejemplos que hemos presentado.

1. 1, 2, 3, 4,...

2. los puntos del intervalo 0,1, o, lo que es lo mismo, la totalidad de los números reales entre 0 y 1.

Lo más natural parecería considerarlos únicamente desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen [Vielheitsstandpunkt]. Sin embargo, si lo hacemos así, podremos constatar los sorprendentes resultados que hoy en día todo matemático conoce.

Consideremos, por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales, esto es, el de todas las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{3}{7}, \ldots$ Desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen es claro que este conjunto no es mayor que el de los números enteros. Decimos entonces que los racionales pueden enumerarse, esto es, que el conjunto es numerable. Esto mismo es también válido para el conjunto de los números que resultan de extraer raíces y, en general, para el de todos los números algebraicos.

Algo similar ocurre con el segundo de nuestros ejemplos. En contra de lo que podrían ser nuestras expectativas, el conjunto de todos los puntos en un cuadrado o en un cubo tampoco es mayor, desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen, que el conjunto de los puntos en el segmento de la recta que va de 0 a 1. Y exactamente lo mismo pasa con el conjunto de las funciones continuas.

Alguien que se ve confrontado por primera ocasión con todos estos hechos bien podría pensar que, en realidad, desde el punto de vista de la cantidad de elementos, no existe sino un único infinito. Sin embargo, no es así.

De hecho, ya los conjuntos de nuestros ejemplos 1 y 2 no tienen, como ahora se dice, "la misma potencia" [gleich mächtig]. El segundo conjunto no es numerable y es mayor que el primer conjunto. Es este precisamente el punto en el que Cantor da inicio al vuelco característico en la formación de sus ideas. Los puntos de la recta no pueden ser enumerados a la manera usual, esto es, usando 1, 2, 3,...

No obstante, una vez que hemos aceptado la existencia del infinito actual, nuestra enumeración no tiene por qué restringirse a esta forma de contar; no hay razón alguna para terminar en ella. Después de haber

contado 1, 2, 3,… podemos considerar los objetos así enumerados como un conjunto terminado infinito ordenado de esa manera. Designemos ahora este orden, de acuerdo con su tipo y siguiendo a Cantor, con ω.

Nuestra enumeración puede ahora continuar de manera natural con $\omega + 1$, $\omega + 2\ldots$ hasta $\omega + \omega$ (esto es, hasta $\omega \cdot 2$) y seguir luego con $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, $\omega \cdot 2 + 3 \ldots$, $\omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3$. Tendríamos más adelante $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3$, $\omega \cdot 4 \ldots$, $\omega \cdot \omega = \omega^2$, $\omega^2 + 1$.... Podríamos consignar nuestros resultados en la siguiente tabla.

$$1, 2, 3, \ldots$$
$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$$
$$\omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots$$
$$\omega \cdot 3, \omega \cdot 3 + 1, \omega \cdot 3 + 2, \ldots$$
$$\omega^2, \omega^2 + 1, \ldots$$
$$\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega \cdot 2, \omega^2 + \omega \cdot 3, \ldots$$
$$\omega^2 \cdot 2, \ldots$$
$$\omega^2 \cdot 2 + \omega, \ldots$$
$$\omega^3, \ldots$$
$$\omega^4, \ldots$$
$$\omega^\omega, \ldots$$
$$\cdot$$

Estos son los primeros números cantorianos transfinitos, o, como dice el mismo Cantor, los números de la segunda clase. La manera de llegar a ellos consiste entonces en llevar el procedimiento de conteo más allá [Hinüberzählen] del infinito numerable ordinario, esto es, en una continuación natural, unívocamente determinada y sistemática de la numeración finita usual. Y así como hasta ahora contábamos el primer objeto de un conjunto, el segundo, el tercero,..., contamos ahora también los objetos que siguen. Esto es, contamos el ω-ésimo objeto del conjunto, el $\omega + 1$-ésimo, el $\omega + 2$-ésimo, … , el ω^ω-ésimo, etc.

Es evidente que la primera cuestión que se plantea en relación a todo ello es la de si con estos números transfinitos es realmente posible contar conjuntos que en el sentido usual del término no son numerables.

Cantor ha logrado desarrollar con éxito estas ideas, dando forma a una teoría de los números transfinitos y a un cálculo completo para los mismos. De este modo y como culminación del trabajo conjunto de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito alcanzaría vertiginosamente el pináculo del éxito en las matemáticas.

Sin embargo, la reacción a todo ello no tardó en hacerse sentir y asumió formas en extremo dramáticas. En realidad, todo ocurrió de manera exactamente análoga a como había sucedido en el caso del cálculo infinitesimal. El entusiasmo que los nuevos y fructuosos resultados suscitaron entre los matemáticos dio lugar a una actitud muy poco crítica en relación a la validez de los modos de inferencia que los sustentaban. Los principios y métodos utilizados para la formación de conceptos permitían el surgimiento de contradicciones. Las primeras inconsistencias se presentaron de manera aislada, pero adquirieron gradualmente mayor gravedad al surgir las llamadas paradojas de la teoría de conjuntos. Fue, en especial, la contradicción descubierta por Zermelo y Russell la que, al ser dada a conocer al mundo matemático, tuvo prácticamente el efecto de una catástrofe en nuestra disciplina.

A causa de estas paradojas, tanto Dedekind como Frege abandonan la posición que habían sustentado hasta entonces e inclusive la rama misma de la investigación que los había ocupado por tanto tiempo. De hecho, durante años Dedekind se mostró renuente a autorizar una nueva edición de su fundamental tratado *Was sind und was sollen die Zahlen?*[1] [1888], mientras que Frege se vio obligado, como él mismo reconoce en una nota al final de los *Grundgesetze der Arithmetik*[2] [1893, 1903], a admitir como errónea la tendencia general de ésta, su obra más importante.

A consecuencia de todo esto, también la teoría de los números transfinitos de Cantor es objeto de severos y apasionados ataques provenientes de los más diversos ámbitos. La reacción es tan radical y en ocasiones tan desmesurada que pone en tela de juicio muchos de los conceptos fundamentales y muchas de las argumentaciones y los métodos más importantes de las matemáticas, llegándose al grado de sugerir una prohibición total de sus aplicaciones.

Ciertamente no faltaron los defensores de lo que parecía derrumbarse, pero las medidas de protección y las soluciones que sugieren son

---

1 *¿Qué son y qué significan los números?* [N. de T.]
2 *Las leyes fundamentales de la aritmética.* [N. de T.]

más bien débiles, además de que se trata, en general, de llevarlos a la práctica en puntos que no siempre son los más apropiados. Se ofrecen demasiados remedios para las paradojas; pero los métodos de clarificación propuestos distan de tener homogeneidad.

Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable. Imaginemos simplemente lo que sucedería si en el paradigma de verdad y confiabilidad científicas que las matemáticas representan, las construcciones conceptuales y las inferencias que nos son familiares nos condujeran a absurdos. ¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?

Por fortuna, existe una vía enteramente satisfactoria que con absoluto apego al espíritu de nuestra disciplina nos permite escapar de las paradojas. Las consideraciones y las metas que orientan este camino son las siguientes.

1. Queremos examinar con todo cuidado aquellas construcciones conceptuales y aquellos métodos de investigación que enriquezcan a nuestra disciplina, queremos cultivarlos, apoyarlos y servirnos de ellos siempre que se presente la más ligera posibilidad de obtener un resultado. Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

2. Es absolutamente necesario alcanzar en los modos de inferencia el mismo grado de seguridad que la que existe en la teoría ordinaria elemental de los números, en la que todo el mundo confía plenamente y en la que una paradoja o una contradicción sólo pueden surgir por nuestra falta de atención.

Es evidente que la realización cabal de estos fines será posible sólo si somos capaces de clarificar por completo la *esencia del infinito.*

Como anteriormente hemos visto, podemos recurrir a la ciencia que queramos y llevar a cabo el tipo de observaciones y las experiencias que deseemos sin encontrar nada a lo que podamos llamar infinito. En otras palabras, en ninguna parte de la realidad existe el infinito. Pero, ¿es el pensamiento de las cosas algo tan diverso de los eventos en los que estas cosas intervienen? ¿Se aleja el pensamiento tanto de la realidad? ¿No ocurre más bien que cuando creemos conocer el infinito como algo en algún sentido real sólo nos dejamos engañar por el hecho de que en la realidad ciertamente nos topamos con frecuencia tanto en la esfera de lo grande como en la de lo pequeño con dimensiones tan inmensas? Y ¿no estará fallando en alguna parte la inferencia lógica concreta [das inhaltliche logische Schliessen] y dejando de satisfacer nuestras expectativas cuando la aplicamos a objetos o sucesos reales?

La respuesta a esto último es definitivamente negativa. La deducción lógica concreta es absolutamente indispensable. Sólo puede conducirnos a errores cuando aceptamos construcciones conceptuales arbitrarias, en particular aquellas que se aplican a una infinidad de objetos.

Lo que en tales casos sucede es que hemos usado de manera ilícita la inferencia lógica concreta, es decir, hemos hecho caso omiso de condiciones previas y necesarias para su aplicación.

Por lo demás, en esta observación relativa a la existencia de condiciones de aplicabilidad de tales deducciones e inferencias y de la necesidad de su cumplimiento satisfactorio coincidimos plenamente con la filosofía, en particular con Kant.

Kant nos enseña, en efecto, en una de las partes centrales de su filosofía, que las matemáticas poseen un contenido [Inhalt] propio e independiente de la lógica, y que, en consecuencia, ésta no puede nunca constituir por sí sola un fundamento para aquéllas.

Se sigue de esto que los intentos de Frege y Dedekind estaban desde un principio condenados al fracaso. La existencia de algo dado en la representación, de ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata, previa a todo pensamiento, es una condición necesaria para la aplicación de las inferencias lógicas y el funcionamiento de las operaciones de este tipo.

Es necesario entonces, si es que hemos de tener a nuestra disposición deducciones e inferencias lógicas confiables, que los objetos sean susceptibles de una visión global completa de todas sus partes y que su presencia, sus diferencias mutuas, su ordenación, su sucesión o su concatenación acompañe a los objetos, al mismo tiempo, como algo dado de manera inmediata en la intuición, como algo irreductible a cualquier otra cosa, como algo que ya no requiere de ninguna reducción.

Esta es la concepción filosófica fundamental que, en mi opinión, resulta necesaria no sólo para las matemáticas, sino también para todo pensamiento, toda comprensión y toda comunicación científicos.

En el caso particular de las matemáticas, el objeto preciso de nuestro examen lo constituyen los signos concretos mismos, cuya forma es, en consonancia con el punto de vista que hemos adoptado, inmediatamente clara y reconocible.

Recordemos nuevamente en qué consiste la teoría finitista usual de los números y cuáles son sus métodos. Es claro que ésta puede obtenerse por medio de una serie de consideraciones concretas intuitivas, recurrien-

do exclusivamente a construcciones numéricas. Pero es también evidente que las matemáticas no se agotan en forma alguna en las ecuaciones numéricas y que tampoco pueden reducirse a éstas.

Sin embargo, podemos perfectamente defender la idea de que, en realidad, las matemáticas no son sino una especie de aparato que al ser aplicado a números enteros debe proporcionarnos siempre igualdades numéricas verdaderas. El problema que en ese caso se plantea es el de investigar la construcción de ese aparato hasta el punto en el que toda duda al respecto haya desaparecido.

Ahora bien, para llevar a cabo esta tarea no tenemos a nuestra disposición otros medios que el mismo enfoque concreto [konkret inhaltliche Betrachtungsweise] y el mismo enfoque finitista del pensamiento que ya habíamos utilizado en la construcción de la teoría de los números para obtener las igualdades numéricas.

Es un hecho que tenemos la capacidad de satisfacer esta exigencia de la ciencia, es decir, es posible obtener de manera puramente intuitiva y finitista, tal y como ocurre con las verdades de la teoría de los números, aquellas ideas y aquellos resultados que garantizan la plena confiabilidad del aparato matemático.

Ocupémonos ahora con mayor detalle de la teoría de los números

En esta teoría tenemos los numerales [Zahlzeichen]

1, 11, 111, 11111.

A cada uno de estos numerales lo podemos reconocer por el hecho de que al 1 siempre le sigue el 1. Estos numerales que estamos considerando carecen de todo significado.

Pero ya en la teoría elemental de los números necesitamos, además de estos signos, de otros con los que podamos expresar significados y que nos sean útiles para la comunicación (por ejemplo, del signo 2 como abreviatura de 11, de 3 como abreviatura de 111, etc.). Nos serviremos, además, de los signos +, =, >, y de otros para comunicar información. Así, *v.gr.* $2 + 3 = 3 + 2$ nos hace saber que $2 + 3$ y $3 + 2$ son, en realidad, tomando en cuenta las abreviaturas que estamos usando, el mismo numeral, esto es, 11111. De manera análoga, podemos expresar con $3 > 2$ el hecho de que el signo 3, es decir, 111 se extiende más allá del signo 2, esto es, que 11; o equivalentemente, que este último es un segmento propio del primero.

Para expresar y comunicar nos serviremos también de las letras góticas $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ para referirnos a numerales. De acuerdo con ello,

$$\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$$

nos dice que el numeral $\mathfrak{b}$ tiene mayor extensión que el numeral $\mathfrak{a}$. De manera similar,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

solamente estaría expresando que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es el mismo numeral que $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. La corrección concreta de esta afirmación puede ser demostrada mediante inferencias materiales.

Vemos entonces que con este tipo de tratamiento intuitivo y concreto es posible llegar bastante lejos.

Deseo presentar a continuación un primer ejemplo en el que este enfoque intuitivo se ve rebasado. Hasta ahora, el mayor número primo conocido es

$$\mathfrak{p} = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

que consta de 39 dígitos.

Si utilizamos el conocido procedimiento de Euclides, podemos establecer con facilidad, y enteramente de conformidad con el enfoque finitista que hemos adoptado, que entre $\mathfrak{p} + 1$ y $\mathfrak{p}\,! + 1$ existe un nuevo número primo.

Esta última afirmación es también acorde a nuestro punto de vista finitista, pues, la expresión "existe" no es aquí otra cosa que una abreviatura del siguiente enunciado:

$\mathfrak{p} + 1$ es primo, o $\mathfrak{p} + 2$ es primo,
o $\mathfrak{p} + 3$ es primo, o ... , o $\mathfrak{p}\,! + 1$ es primo.

Ahora bien, es evidente que esta afirmación resulta equivalente a: existe un número primo que es:

1. $> \mathfrak{p}$

y

2. $\leq \mathfrak{p}\,! + 1$.

A partir de esta formulación podemos pasar a una proposición que expresa únicamente una parte de la afirmación euclidiana, esto es,

existe un número primo $> \mathfrak{p}$.

Sin embargo, aunque desde el punto de vista concreto este enunciado afirma mucho menos que el anterior, y aunque el paso de la afirmación euclidiana a este enunciado parcial de la misma parezca tan inocuo, su afirmación independiente del contexto anterior significa un salto a la esfera de lo transfinito. ¿Cómo puede ser esto?

Lo que tenemos frente a nosotros es un enunciado existencial [de la forma] "existe". En la proposición euclidiana también aparecería una afirmación de esta índole. Pero aquí, la expresión "existe" no es otra cosa que una abreviatura de

$\mathfrak{p} + 1$ es primo, o $\mathfrak{p} + 2$ es primo,
o $\mathfrak{p} + 3$ es primo, o …, o $\mathfrak{p}\,! + 1$ es primo.

del mismo modo que decimos: entre estos trozos de gis existe uno que es rojo, en lugar de decir: este trozo de gis es rojo o ese trozo de gis es rojo o...o aquel trozo de gis es rojo. Un enunciado de este tipo, en el que se afirma que en una totalidad finita "existe" un objeto con una cierta propiedad, se encuentra en completa conformidad con la concepción general finitista que hemos aceptado.

La expresión

$\mathfrak{p} + 1$ es primo, o $\mathfrak{p} + 2$ es primo, o $\mathfrak{p} + 3$ es primo, o … *ad inf.*

sería una especie de producto[3] lógico infinito. Pero al igual que ocurre en el análisis, una transición de este tipo de lo finito a lo infinito no puede aceptarse en general, esto es, sin una discusión especial previa —y, en este caso, sin una observación rigurosa de ciertas precauciones—; de otro modo carece, en principio, de sentido.

Podemos generalizar lo anterior diciendo que un enunciado existencial de la forma "existe un número con tales y cuales propiedades" únicamente tiene sentido como *enunciado parcial*, es decir, como parte de un enunciado determinado con mayor particularidad y cuyo contenido exacto carece, sin embargo, de importancia para muchas aplicaciones.

---

[3] Más bien disyunción. [N. de T.]

De esta manera, nos topamos con el transfinito al analizar un enunciado existencial que no puede interpretarse como una disyunción[4]. Obtenemos igualmente enunciados transfinitos cuando por ejemplo negamos una proposición universal, esto es, una proposición que se refiere a numerales indeterminados. Así, por ejemplo, desde el punto de vista finitista, el enunciado de que, para cualquier numeral $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}$$

no es susceptible de negación.

Podemos explicarnos esta situación si tenemos presente que el enunciado no puede ser interpretado como una expresión compuesta de un número infinito de igualdades numéricas conectadas por la palabra "y", sino que debe serlo como juicio hipotético que afirma algo con tal de que dispongamos ya de un numeral.

Una consecuencia importante de esto es que, de acuerdo con la perspectiva finitista que estamos discutiendo, nos encontramos imposibilitados para utilizar el principio según el cual una ecuación como la anterior, en la que aparece un numeral no especificado es, o bien satisfecha por todos y cada uno de los numerales, o bien refutada por un contraejemplo. En efecto, esta alternativa descansa esencialmente, en tanto que aplicación del principio del tercero excluido, en la suposición de que la validez general de esa igualdad puede ser negada.

Podemos concluir entonces que cuando permanecemos, tal y como estamos obligados a hacerlo, en la esfera de los enunciados finitos, dependemos de relaciones lógicas poco claras, y esta ausencia de claridad se convierte en algo intolerable cuando el "todos" y el "existe" se combinan en enunciados subordinados. Como sea, las leyes lógicas utilizadas por el ser humano desde que éste tiene la capacidad de pensar y que Aristóteles nos ha enseñado no tienen aquí validez.

Así las cosas, podríamos proponernos como tarea inicial la determinación explícita de las leyes lógicas que son válidas para la esfera de las

---

[4] El texto alemán dice "Wir stoßen also hier auf das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage, die sich nicht als eine Oder-Verknüpfung deuten läßt". En la versión de 1930 publicada en los *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert corrige la frase: "Wir stoßen also hier auf das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage in Teile, deren keiner sich als nicht eine Oder-Verknüpfung deuten läßt". Es decir: "nos topamos con el transfinito al analizar un enunciado existencial, ninguna de cuyas partes puede interpretarse como una disyunción". [N. de T.]

proposiciones finitarias. Sin embargo, esto no bastaría, pues, en realidad, lo que no queremos es precisamente renunciar al uso de las sencillas leyes de la lógica aristotélica, y nadie, no importa que tan persuasivamente argumente, podrá impedir que los hombres continúen negando afirmaciones de todo tipo, haciendo juicios parciales y aplicando el principio del tercero excluido. Pero entonces ¿cuál debe ser nuestra actitud?

Recordemos, en primer lugar, que *somos matemáticos* y que, en cuanto tales, nos hemos encontrado ya, con frecuencia, en situaciones igualmente difíciles. Recordemos, además, que ha sido el genial método de los elementos ideales el que en tales circunstancias nos ha salvado. He mencionado ya, al comienzo de mi exposición, algunos ejemplos notables de su aplicación.

De manera exactamente análoga a como $i = \sqrt{-1}$ ha sido introducido con el objeto de mantener en su forma más sencilla posible las leyes del álgebra, por ejemplo, las relativas a la existencia y al número de raíces de una ecuación, así como introducimos factores ideales con el fin de preservar la sencillez de las leyes de la divisibilidad entre los números algebraicos (por ejemplo, hemos introducido un divisor común ideal para los números 2 y $1 + \sqrt{-5}$ al no existir uno real), tenemos ahora que *añadir a los enunciados finitos los enunciados ideales*, conservando de este modo las reglas de la lógica aristotélica en su simplicidad original.

En realidad, no deja de ser extraño que los principios deductivos que Kronecker ataca con tanta pasión sean precisamente la contraparte de lo que después él mismo, en la teoría de los números, encuentra tan admirable en la obra de Kummer, y que califica con tanto entusiasmo como el logro más elevado de la actividad matemática.

Pero ¿cómo podemos llegar a los *enunciados ideales*? Una indicación notable de la esencial corrección de nuestro procedimiento es el hecho de que la vía para llegar a esos enunciados consista simple y sencillamente en continuar de manera natural y consecuente el desarrollo seguido por la teoría de los fundamentos de las matemáticas.

Es fácil constatar que la matemática elemental va más allá de la perspectiva que adopta la teoría intuitiva de los números. Es decir, el método de calcular algebraicamente con letras no es, en la forma en la que hasta ahora lo hemos interpretado, algo que forme parte de la teoría concreta intuitiva de los números [inhaltlich-anschauliche Zahlentheorie]. En ésta, las fórmulas se utilizan siempre única y exclusivamente con

fines de comunicación; las letras se refieren a numerales y una igualdad no expresa sino la identidad de dos signos.

Por el contrario, en el álgebra, consideramos a las expresiones formadas por letras como algo autónomo, al tiempo que los enunciados concretos de la teoría de los números son formalizados precisamente por esas expresiones.

Así, en lugar de enunciados acerca de numerales, tenemos fórmulas, presentándose éstas ahora como objetos concretos de nuestra intuición; y, en lugar de las demostraciones concretas de la teoría de los números [inhaltlich zahlentheoretische Beweise] tenemos ahora la derivación de una fórmula a partir de otra de acuerdo con ciertas reglas.

Lo que obtenemos entonces es, como lo muestra ya el álgebra, una multiplicación de los objetos finitos. Hasta ahora, estos objetos no eran otros que numerales como I, II, ..., IIIII. Estos signos eran, además, los únicos que habían sido objeto de una consideración concreta. Pero ya en el álgebra la praxis matemática va mucho más lejos de eso. Así, aun cuando un enunciado resulte permisible de acuerdo con nuestro enfoque finitista en conjunción con las indicaciones concretas, como, por ejemplo, la proposición

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}\,,$$

donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son numerales específicos, la forma de comunicación que utilizaremos no será ésta, sino

$$a + b = b + a.$$

Esta fórmula no es ya la comunicación inmediata de un contenido [Inhalt], sino tan sólo una construcción formal cuya relación con los enunciados finitistas originales

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$5 + 7 = 7 + 5$$

consiste en que en la primera fórmula los numerales 2, 3, 5, 7 reemplazan a a y b, estableciéndose con ello, por medio de este sencillo procedimiento demostrativo, tales enunciados finitistas particulares.

De este modo, entonces, podemos concluir que ni a, ni b, ni =, ni +, ni siquiera la fórmula

$$a + b = b + a$$

poseen, por sí mismos, ningún significado, que ocurre con ellos a este respecto lo mismo que con los numerales. Sin embargo, a partir de esa fórmula es posible derivar otras fórmulas a las que sí podemos asignar un significado, considerándolas como comunicaciones de enunciados finitistas.

La generalización de esta idea nos lleva a una concepción de las matemáticas que considera a éstas como un inventario de fórmulas a las que corresponden, en primer lugar, expresiones concretas de enunciados finitistas y a las que se añaden, en segundo, otras fórmulas que carecen de todo significado y que constituyen *los objetos ideales de nuestra teoría.*

Recordemos ahora cuál era nuestro objetivo. Por una parte, encontramos en las matemáticas enunciados finitistas que no contienen sino numerales. Por ejemplo,

$$3 > 2\,, \quad 2 + 3 = 3 + 2\,, \quad 2 = 3\,, \quad 1 \neq 1\,.$$

De acuerdo con nuestro enfoque finitista, estos enunciados se presentan como algo inmediatamente intuitivo y comprensible, como algo susceptible de ser negado, que es verdadero o falso, y en relación a lo cual podemos hacer valer sin ninguna clase de restricciones las reglas de la lógica aristotélica. El principio de no contradicción —esto es, un enunciado y su negación no pueden ser a la vez verdaderos— y el del "tercero excluido" —es decir, o bien un enunciado es verdadero o lo es su negación— son aquí válidos. Así, si digo que este enunciado es falso, esto resulta equivalente a afirmar que su negación es verdadera.

Además de estos enunciados elementales absolutamente no problemáticos, encontramos enunciados finitistas que sí lo son, por ejemplo aquellos que no se pueden descomponer en enunciados más simples. Por último, hemos introducido también los enunciados ideales, cuya función consiste en preservar la validez de las leyes usuales de la lógica.

Ahoran bien, en tanto que no expresan afirmaciones finitistas, los enunciados ideales, esto es, las fórmulas, carecen de todo significado, por lo que no podemos aplicarles las operaciones lógicas de manera concreta [inhaltlich] como a los enunciados finitistas. Se hace entonces necesario someter a un proceso de formalización tanto a las operaciones lógicas como a las demostraciones mismas. Pero este proceso requiere, a su vez, de una reformulación de las relaciones lógicas en fórmulas. Por esta razón necesitamos, aparte de los signos matemáticos, signos lógicos, *v.gr.*

&	$\vee$	$\rightarrow$	$-$
y	o	implica	no

Además de variables matemáticas *a*, *b*, *c*, ... necesitamos de variables lógicas, esto es, de variables enunciativas *A*, *B*, *C*, ...

¿Cómo podemos lograr todo esto? En la historia de la ciencia es posible observar con frecuencia la existencia de una especie de armonía preestablecida a la que se debe una serie de desarrollos del conocimiento de gran importancia. Es precisamente esa armonía de la que Einstein, por ejemplo, saca provecho en su teoría de la gravitación al encontrar como algo dado en forma ya acabada el cálculo general de invariantes. Por fortuna, esa misma armonía se pone de manifiesto en relación a nuestra problemática, permitiéndonos hallar como algo ya elaborado de manera avanzada el *cálculo lógico.*

Es evidente, por lo demás, que este cálculo se crea originalmente en el marco de una perspectiva completamente diferente a la nuestra. De acuerdo con ese enfoque, los signos del cálculo lógico se introducen exclusivamente como un medio de comunicación. Resulta consecuente con el curso que hemos seguido despojar ahora a los signos lógicos, lo mismo que a los signos matemáticos de cualquier tipo de significado. Según esto, las fórmulas del cálculo lógico no poseen absolutamente ningún significado; todos ellos son ahora enunciados ideales.

En el cálculo lógico contamos con un lenguaje de signos [Zeichensprache] con la capacidad no sólo de dar cuenta en fórmulas de las proposiciones de las matemáticas, sino igualmente de expresar por medio de procesos formales las inferencias lógicas.

Procediendo de manera exactamente análoga al paso de la teoría concreta de los números al álgebra formal, consideraremos ahora a los signos y a los símbolos de operación del cálculo lógico como algo desprovisto de su significado concreto. En lugar de la ciencia matemática concreta [inhaltliche mathematische Wissenschaft], lo que en último término obtenemos con todo ello es un inventario de fórmulas que contienen signos tanto lógicos como matemáticos, y que se ordenan según reglas definidas. Algunas de estas fórmulas corresponden a los axiomas matemáticos, y ciertas reglas (de acuerdo con las cuales ciertas fórmulas siguen a otras) corresponden a la inferencia concreta. En otras palabras, la inferencia concreta es reemplazada por un manejo externo

[äusseres Handeln][5] según reglas. Con ello se realiza de manera estricta el tránsito de un tratamiento intuitivo e ingenuo a uno formal.

Por una parte, esta transición se lleva a cabo con los axiomas mismos, considerados ingenuamente en su origen como verdades básicas y a los cuales la axiomática moderna concibe desde hace mucho como meras interrelaciones de conceptos. Por la otra, sin embargo, la transición tiene lugar también en relación al cálculo lógico, originalmente pensado como un simple lenguaje diferente.

Como ejemplo, bastará aclarar aquí brevemente la manera en la que ha de formalizarse la *demostración matemática*.

Llamaremos *axiomas* a ciertas fórmulas que sirven como punto de partida para la construcción del edificio formal de las matemáticas. Una demostración matemática es una figura que se presenta ante nosotros como algo intuitivo. Consiste de inferencias llevadas a cabo de acuerdo con el esquema

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

en la que cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas que corresponden a $\mathfrak{S}$ y a $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ es o bien un axioma o resulta de un axioma por sustitución o coincide con la fórmula final de una inferencia previa o resulta de una fórmula de ese tipo por sustitución. Una fórmula es demostrable si es la fórmula última de alguna demostración.

El programa que hemos enunciado prefigura ya la elección de los axiomas de nuestra teoría de la demostración. Y aunque hay algo de arbitrariedad en tal elección, es posible, como en la geometría, distinguir grupos particulares cualitativamente diversos, de los que ahora ofreceremos algunos ejemplos.

I. Axiomas de implicación

$$A \to (B \to A)$$

(introducción de una suposición)

---

[5] Esto es, un manejo formal. [N. de T.]

$$(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$

(eliminación de un enunciado)

II. Axiomas de la negación

$$\{A \rightarrow (B \,\&\, \overline{B})\} \rightarrow \overline{A}$$

(principio de contradicción)

$$\overline{\overline{A}} \rightarrow A$$

(principio de la doble negación).

[Del principio de contradicción se sigue la fórmula $(A \,\&\, \overline{A}) \rightarrow B$; y del principio de la doble negación se sigue el principio del tercero excluido $\{(A \rightarrow B) \,\&\, (\overline{A} \rightarrow B)\} \rightarrow B$][6].

Los axiomas de los grupos I y II no son, en realidad, otros que los del cálculo de enunciados.

III. Axiomas de transfinitud

$$(a) A(a) \rightarrow A(b)$$

(inferencia de lo universal a lo particular; axioma de Aristóteles);

$$\overline{(a)}\; A \rightarrow (Ea) \overline{A}(a)$$

(si un predicado no se aplica a todos los individuos,
hay un contraejemplo);

$$(\overline{E} a) A \rightarrow (a) \overline{A}(a)$$

(si no hay un individuo al que un enunciado se aplique, entonces el enunciado es falso para toda *a*).

En relación a los principios del grupo de axiomas III se pone de manifiesto una situación por demás notable, a saber, que todos los axiomas transfinitos pueden obtenerse por derivación a partir de uno solo y que éste posee la característica de contener el núcleo fundamental

[6] El texto entre paréntesis cuadrados es un añadido de la tercera versión de 1930. [N. de T.]

del axioma matemático que más ha provocado controversias en nuestra disciplina, el axioma de elección:

$$A(a) \to (\varepsilon A),$$

donde ε es la función de elección transfinita.

A ellos se agregan los axiomas matemáticos especiales:

IV. Axiomas de la igualdad

$$a = a;$$

$$a = b \to (A(a) \to A(b)),$$

y también los

V. Axiomas numéricos

$$a + 1 \neq 0$$

y el axioma de inducción completa:

$$\{A(0) \,\&\, (x)(A(x) \to A(x'))\} \to A(a)$$ [7]

Con todos estos axiomas es posible desarrollar una teoría de la demostración que se ajuste a las exigencias que hemos delineado y erigir un sistema de las fórmulas demostrables, es decir, la ciencia matemática.

Pero en nuestro entusiasmo por el éxito que en general hemos obtenido y, en particular, por contar con una herramienta tan imprescindible como el cálculo lógico como algo ya dado, no debemos de ninguna manera perder de vista un requisito previo para nuestro proceder y esencial al mismo. Existe una condición única, aunque absolutamente necesaria, para la aplicación del método de los elementos ideales, a saber, *la prueba de consistencia.*

La extensión por medio de la adición de ideales es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original, y, en consecuencia, únicamente si al suprimir los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original.

---

[7] Esta fórmula no aparece en la edición de 1925. Hilbert la añade, sin embargo, en 1930. [N. de T.]

Es un hecho que en la actualidad estamos en grado de plantearnos y abordar este problema de la consistencia. Es evidente que éste se reduce a mostrar que con los axiomas y reglas admitidos es imposible obtener "$1 \neq 1$" como la fórmula final, es decir, que la fórmula "$1 \neq 1$" no es demostrable.

La dificultad a la que aquí nos enfrentamos se ubica fundamentalmente en la esfera de lo intuitivo, y ocurre con ella lo mismo que, digamos, en la teoría concreta de los números con el problema del carácter irracional de $\sqrt{2}$, esto es, con la demostración de que es imposible encontrar dos numerales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ que se encuentren en la relación $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{b}^2$; en otras palabras, que es imposible hallar dos números con una cierta propiedad. En correspondencia con ello, lo que nosotros tenemos que demostrar ahora es que no puede haber una demostración que exhiba ciertas características.

Al igual que un numeral, una demostración formalizada es un objeto concreto y susceptible de inspección, es algo que podemos comunicar por completo. Que una fórmula final tenga la característica en cuestión, esto es, que sea "$1 \neq 1$" constituye también una propiedad concreta y constatable de una demostración. Ahora bien, la prueba de su imposibilidad es algo que realmente podemos llevar a cabo y que justifica la introducción que hemos hecho de enunciados ideales.

Al mismo tiempo, lo anterior nos ofrece la grata sorpresa de constituir también la solución de un problema que se había convertido desde hace tiempo en algo verdaderamente perentorio, el de la demostración de *la consistencia de los axiomas de la aritmética.*

La aplicación del método axiomático plantea de manera natural la cuestión de la consistencia. La elección, la interpretación y el manejo de los axiomas no pueden estar basadas simplemente en la buena fe y en lo que nuestras creencias nos indiquen. Tanto en la geometría como en la física es posible dar pruebas de consistencia relativa, esto es, de reducir el problema de la consistencia en esas esferas a la consistencia de los axiomas de la aritmética. Pero es evidente que no tiene sentido buscar una demostración de ese tipo para la aritmética misma.

En la medida en la que nuestra teoría de la demostración, basada en el método de los elementos ideales, hace posible este último y decisivo paso, constituye una especie de punto final y necesario en la construcción del edificio de la teoría axiomática. Y lo que ya hemos tenido que padecer en dos ocasiones, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y

luego con las paradojas de la teoría de conjuntos no podrá pasarnos una tercera vez, no volverá a pasar nunca.

Podemos decir, entonces, que la teoría de la demostración, cuyos rasgos principales acabamos de bosquejar, no sólo se encuentra en condiciones de dar una base firme y segura a las matemáticas, sino que abre también una vía novedosa para abordar los problemas generales de carácter fundamental que caen dentro del dominio de nuestra disciplina y a los que antes no podíamos abocarnos.

Las matemáticas se convierten así en una especie de tribunal superior, esto es, en un tribunal de suprema instancia para la evaluación y resolución de cuestiones de principio, siempre sobre una base concreta en relación a la cual es no sólo posible un consenso, sino al mismo tiempo un control de cada afirmación.

En mi opinión, inclusive los planteamientos del "intuicionismo", no importa qué tan modestos sean, pueden adquirir su justificación únicamente ante este tribunal.

A manera de ejemplo del tratamiento de este tipo de cuestiones fundamentales, consideremos la tesis de que todo problema en las matemáticas posee una solución. Esta suposición es compartida por todos los matemáticos. De hecho, una parte muy importante del atractivo que puede tener para nosotros la ocupación con un problema en las matemáticas reside precisamente en que de alguna manera escuchamos una especie de llamado: "Allí tienes el problema. ¡Busca la solución! Puedes hallarla con la sola ayuda del pensamiento; ¡en las matemáticas no hay *ignorabimus*"[8]!

Ciertamente, la teoría de la demostración no puede proporcionar un método general para resolver todos los problemas matemáticos. No existe algo de este tipo. Sin embargo, lo que sí cae dentro del campo de acción de nuestra teoría es la prueba misma de la consistencia de la suposición del carácter resoluble de todo problema matemático.

Pero me gustaría argumentar todavía como sigue. La prueba definitiva para la evaluación de cualquier teoría nueva la constituye su capacidad para

[8] Hilbert se refiere aquí a la posición de Emil duBois-Reymond acerca de la limitación esencial de la razón humana en el conocimiento de la naturaleza y, particularmente, a su imposibilidad para resolver ciertos problemas (materia, fuerza, origen del movimiento, conciencia, etc.). DuBois-Reymond resumía sus ideas en la afirmación *Ignoramus et ignorabimus* (ignoramos e ignoraremos). [N. de T.]

resolver problemas planteados antes de que ella existiera, problemas cuya solución no formaba parte de las razones específicas para crearla. "Por sus frutos los conoceréis" es también un principio válido para las teorías. Así, inmediatamente después de que Cantor descubre los primeros números transfinitos, esto es, los números de la segunda clase, se plantea el problema de determinar si realmente es posible contar con tales números conjuntos ya conocidos y que en un sentido normal no son numerables.

Uno de estos conjuntos es evidentemente el de los puntos de la recta. La cuestión de si los números de la tabla que hemos formulado anteriormente bastan para contar los puntos de la recta, es decir, los números reales, constituye el célebre problema del continuo, que Cantor mismo plantea, pero no resuelve. Al principio, algunos matemáticos creyeron poder desembarazarse de este problema simplemente negando su existencia. Los puntos que a continuación señalamos muestran claramente lo equivocado de tal actitud.

El problema que el continuo plantea se caracteriza por su originalidad y su belleza interna. Pero, además, posee en relación a otros problemas también célebres en las matemáticas dos rasgos distintivos y preeminentes. Por una parte, su solución requiere de vías alternativas y novedosas, puesto que los métodos conocidos fallan en este caso; por la otra, su solución resulta por sí misma de mayor interés en vista del resultado a obtener.

La solución del problema del continuo es algo que puede realizarse con la teoría que hemos desarrollado. De hecho, la prueba de que todo problema matemático tiene una solución representa precisamente el primer paso de importancia en esa dirección.

La respuesta al problema del continuo es afirmativa, esto es, los puntos de una recta pueden ser contados por medio de números de la segunda clase. O para decirlo en forma popular, que un simple conteo que se extiende más allá del infinito numerable [ein blosses Hinüberzählen über das abzählbare unendlich] basta para agotar los puntos de la recta. Llamaremos a esta afirmación el teorema del continuo. Lo que sigue es una breve exposición de las ideas básicas de una demostración del mismo.

En lugar del conjunto de los números reales consideraremos algo que es evidentemente equivalente, el conjunto de las funciones numéricas, esto es, el de las funciones cuyos argumentos y valores son siempre números enteros.

Si queremos ordenar el conjunto de estas funciones en el sentido requerido por el problema del continuo, es necesario hacer referencia al

proceso de generación de una función individual. Sin embargo, una función de un solo argumento puede estar definida de tal manera que los valores que tome para algunos argumentos, o para todos ellos, dependa en cada caso de la solución de algún problema matemático bien definido, por ejemplo, de la solución de ciertos problemas diofantinos o de la existencia de números primos con determinadas características, o de la cuestión de si un número dado (digamos $2^{\sqrt{2}}$) es irracional.

Precisamente para evitar esta dificultad podemos recurrir a la afirmación mencionada con anterioridad acerca de la solubilidad de cualquier problema matemático bien definido. En realidad, esta afirmación no es otra cosa que un lema general que se ubica en un ámbito al que podemos llamar *metamatemática*, es decir, en la esfera de la teoría concreta de las demostraciones formalizadas [inhaltliche Theorie der formalisierten Beweise]. Podemos formular como sigue la parte de ese lema que resulta de importancia para nosotros.

LEMA I. Supongamos que tenemos una versión formalizada de una demostración que contradice el teorema del continuo y que esa formalización ha sido llevada a cabo por medio de funciones que requieren para su definición del signo transfinito ε (grupo III de axiomas). Resulta entonces posible sustituir esas funciones por otras, definidas exclusivamente por recursión ordinaria y transfinita y sin apelar al signo ε, de tal manera que lo transfinito sólo aparece en la forma del cuantificador universal, ( ) .

El desarrollo cabal de la teoría de la demostración requiere, sin embargo, de ciertas estipulaciones de las que ahora nos ocuparemos.

Para los *enunciados variables* [variable Aussagen] (fórmulas indeterminadas) utilizaremos siempre letras latinas mayúsculas, mientras que para los *enunciados constantes* [individuelle Aussagen] (fórmulas específicas), nos serviremos de letras griegas mayúsculas. Así, por ejemplo,

$\mathrm{Z}(a)$: "a es un número entero ordinario";

$\mathrm{N}(a)$: "a es un número de la segunda clase".

Para las *variables matemáticas* se utilizarán siempre letras latinas minúsculas, mientras que para los *objetos matemáticos constantes* (funciones específicas) recurriremos a las letras griegas minúsculas.

En relación al procedimiento de *sustitución* serán válidas las siguientes convenciones generales.

Las variables enunciativas [Aussagenvariable] deben ser sustituidas únicamente por otros enunciados (fórmulas) indeterminados o constantes.

Una variable matemática puede ser sustituida por una figura [Figur] cualquiera. Sin embargo, cuando una variable matemática aparece en una fórmula, el enunciado constante que caracteriza su tipo debe aparecer antes del signo de implicación. Por ejemplo,

$$\mathsf{Z}(a) \rightarrow (\ldots a \ldots),$$

$$\mathsf{N}(a) \rightarrow (\ldots a \ldots).$$

Nuestra convención tiene el efecto de que, por ejemplo, en lugar de a en $\mathsf{Z}(a)$ o en $\mathsf{N}(a)$ únicamente sean permisibles las sustituciones de esta variable por números ordinarios o por números de la segunda clase, respectivamente.

Las letras góticas mayúsculas y minúsculas son siempre *indicadores* [Hinweise] y se utilizan exclusivamente para comunicar información.

Es necesario dejar en claro que por "figura" estamos entendiendo aquí un objeto compuesto a partir de signos primitivos y que se presenta ante nosotros como algo intuitivo.

Para tener una idea completa de la línea que sigue la demostración del teorema del continuo es indispensable ante todo una comprensión precisa del concepto de variable matemática en su acepción más general.

Las variables matemáticas son de dos clases:

(1) las *variables primitivas* [Grundvariablen],
(2) los *tipos variables* [Variablentypen].

(1) Mientras que en la aritmética y el análisis en su totalidad es suficiente contar con los números enteros ordinarios como únicas variables primitivas, tenemos ahora que a cada una de las clases numéricas transfinitas de Cantor le corresponde una *variable primitiva* que puede adoptar la forma de números ordinales de esa clase. En consecuencia, a cada una de esas variables se encuentra asociado un enunciado que la caracteriza. Este enunciado se encuentra a su vez caracterizado de manera implícita por los axiomas. Por ejemplo,

$$\mathsf{Z}(0),$$

$$\mathsf{Z}(a) \rightarrow \mathsf{Z}(a+1),$$

$$\{A(0) \,\&\, (a)(A(a) \rightarrow A(a+1))\} \rightarrow \{\mathsf{Z}(a) \rightarrow A(a)\}$$

(fórmula de la inducción normal)

$$N(0),$$
$$N(a) \rightarrow N(a+1),$$
$$(n)\{Z(n) \rightarrow N(a)\} \rightarrow N \lim a(n);$$

y además la fórmula de la inducción transfinita para los números de la segunda clase.

A cada clase de variables primitivas corresponde un tipo específico de recursión. Por medio de ésta pueden definirse funciones cuyos argumentos son precisamente las variables primitivas de esa clase. La recursión asociada a las variables numéricas no es otra que la "recursión ordinaria". Por medio de ella, una función de una variable numérica n se encuentra definida cuando se da su valor para $n = 0$ y se especifica cómo puede obtenerse el valor de la función para $n + 1$ a partir del valor para n. La generalización de la recursión usual es la recursión transfinita, cuyo principio general consiste en la determinación del valor de la función para un valor de la variable recurriendo a los valores anteriores de esa misma función.

(2) A partir de las variables primitivas obtenemos por aplicación de las operaciones lógicas a los enunciados asociados con esas variables otros tipos variable, *v.gr.* Z y N. Las variables definidas de esta manera se llaman *tipos variable*, mientras que los enunciados así definidos reciben el nombre de *enunciados tipo* [Typenaussagen]. Para estos últimos se introducen cada vez nuevos signos constantes. La fórmula

$$(a)\{Z(a) \rightarrow Z(f(a))\}$$

constituye el ejemplo más sencillo de un tipo variable. Es decir, esta fórmula define la variable funcional f y, en tanto que enunciado tipo, es denotada por $\Phi(f)$, "ser una función".

Otro ejemplo nos lo ofrece la fórmula

$$(f)\{\Phi(f) \rightarrow Z g(f)\};$$

Esta expresión define la propiedad de "ser una función de función", $\Psi(g)$, en la que el argumento g representa la nueva variable de función de función[9].

[9] "Función de función" se refiere a una "funcional" y no a una "composición de funciones". [N. de T.]

Para la caracterización de los tipos variables superiores es necesario proveer de índices a los enunciados tipo. Un enunciado tipo que consta ya de un índice se define recursivamente, de tal modo que en su definición aparezca ahora en lugar de la igualdad (=) la equivalencia lógica (~).

Tanto en la aritmética como en el análisis, las únicas variables superiores que se utilizan, en interacción finita son: las funciones, las funciones de función, etc.

Un tipo variable que va más allá de estos sencillos ejemplos nos lo ofrece la variable g que asocia un valor numérico $g(f_n)$ a cualquier sucesión f_n que consista de

una función f_1 de un número entero: $\Phi(f_1)$;

una función de función f_2 : $\Psi(f_2)$;

una función f_3 de una función de función;

etc.

Podemos representar el enunciado tipo correspondiente, $\Phi_\omega(g)$, por medio de las siguientes equivalencias:

$$\Phi_0(a) \sim Z(a),$$

$$\Phi_{n+1}(f) \sim (b)\{\Phi_n(b) \rightarrow Z(f(b))\},$$

$$\Phi_\omega(g) \sim \{(n)\Phi_n(f_n) \rightarrow Z(g(f))\};$$

que constituyen igualmente un ejemplo de la definición recursiva de un enunciado tipo.

Los tipos variable pueden clasificarse de acuerdo con su *nivel* [Höhe][10]. En el nivel 0 se encuentran todas las constantes numéricas; en el nivel 1, todas las funciones cuyos argumentos y valores poseen en su totalidad la propiedad de una variable primitiva, por ejemplo, la propiedad Z o la propiedad N. Una función cuyo argumento y cuyo valor poseen un nivel determinado es de un nivel superior en 1 que el del mayor de esos dos niveles de su argumento y su valor. Una sucesión de funciones de distintos niveles tiene como nivel el límite de esos niveles.

Una vez realizados estos preparativos podemos retomar nuestro problema original. Recordemos que para la prueba del teorema del

---

[10] La traducción literal de la palabra *Höhe* es "altura". Utilizamos la palabra "nivel" por considerarla más adecuada. [N. de T.]

continuo resulta esencial establecer una correspondencia biunívoca entre las definiciones de las funciones numéricas en las que no aparece el símbolo ε y los números cantorianos de la segunda clase, o bien establecer una correspondencia de tal modo que toda función de ese tipo resulte asociada al menos a un número de la segunda clase.

Es evidente que los mecanismos elementales para la construcción de funciones son, por una parte, la *sustitución* (es decir, el reemplazo de un argumento por una nueva variable o una nueva función) y la *recursión* (según el esquema de derivar el valor de la función para $n + 1$ a partir de su valor para n).

Podría pensarse que a estos dos procedimientos, sustitución y recursión, deberían agregarse otros métodos elementales de definición, por ejemplo, la definición de una función explicitando sus valores hasta un cierto punto, a partir del cual la función es constante; también la definición por medio de procesos elementales obtenidos a partir de las operaciones aritméticas como el residuo en la división, la del máximo común divisor de dos números, y la definición de un número como el menor entre una cierta totalidad finita de números dados.

Sin embargo, todas esas definiciones pueden representarse como casos particulares de las operaciones de sustitución y recursión. En realidad, el método de buscar las recursiones requeridas equivale, en lo esencial, a una argumentación que establece el carácter finitista del procedimiento de definición de que se trate.

Es importante ahora tener una visión de conjunto de los resultados de que esas dos operaciones nos proveen. En relación a las recursiones que pueden utilizarse, la existencia de diversas posibilidades en el paso de n a $n+1$, impide una formulación unitaria, si es que hemos de limitarnos a la operación con variables numéricas ordinarias. Un ejemplo bastará para reconocer esta dificultad.

Consideremos las funciones

$$a+b;$$

a partir de ellas se obtiene por iteración (n veces)

$$a+a+\ldots+a=a\cdot n.$$

Asimismo, podemos pasar de $a \cdot b$ a

$$a\cdot a\cdot\ldots a=a^n$$

y de a^b a

$$a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \ldots .$$

De este modo, obtenemos en sucesión las funciones

$$a + b = \varphi_1(a, b),$$

$$a \cdot b = \varphi_2(a, b),$$

$$a^b = \varphi_3(a, b).$$

$\varphi_4(a, b)$ sería el b-ésimo término en la sucesión

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \ldots .$$

De manera exactamente análoga, podemos llegar luego a $\varphi_5(a, b), \varphi_6(a, b)$, etc.

Ciertamente podríamos ahora definir por sustituciones y recursiones $\varphi_n(a, b)$ para n variables, pero esas recursiones no se obtendrían de recursiones ordinarias sucesivas, sino que más bien nos veríamos conducidos a una recursión múltiple para varias variables tomadas simultáneamente. La resolución de esta recursión en sucesiones recursivas ordinarias no se logra sino cuando utilizamos el concepto de variables funcionales. La función $\varphi_a(a, a)$ sería un ejemplo de una función de la variable numérica a que no puede ser definida solamente por sustituciones y recursiones ordinarias sucesivas, si es que sólo aceptamos variables numéricas[11].

Las fórmulas

$$\iota(f, a, 1) = a,$$

$$\iota(f, a, n+1) = f(a, \iota(f, a, n));$$

$$\varphi_1(a, b) = a + b,$$

$$\varphi_{n+1}(a, b) = \iota(\varphi_n, a, b),$$

[11] La demostración de esta afirmación se debe a W. Ackermann.

en las que ι es una función específica de tres argumentos, de los cuales el primero es una función de dos variables numéricas ordinarias, muestran la manera en la que podemos definir la función $\varphi_n(a, b)$ utilizando variables funcionales.

Un ejemplo de una recursión más complicada es el siguiente:

$$\varphi_0(a) = \mathfrak{a}(a)$$

$$\varphi_{n+1}(a) = \mathfrak{f}(a, n, \varphi_n(\varphi_n(n+a))),$$

donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{f}$ representan expresiones conocidas de uno y tres argumentos respectivamente. Lo peculiar de esta recursión consiste en que en ella el valor numérico de $n + 1$ no se deriva del valor correspondiente para n, sino que la determinación de φ_{n+1} requiere que se conozca el curso [Verlauf] de la función φ_n.

Todas las dificultades que estos ejemplos nos plantean pueden ser superadas si recurrimos a los tipos variable. El esquema general de recursión se encuentra caracterizado de la siguiente manera

$$\rho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, 0) = \mathfrak{a},$$

$$\rho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n+1) = \mathfrak{g}(\rho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n), n),$$

donde $\mathfrak{a}$ es una expresión dada de un tipo variable arbitario; $\mathfrak{g}$ es también una expresión dada de dos argumentos, de los cuales el primero es del mismo tipo variable que $\mathfrak{a}$, mientras que el segundo es un número. $\mathfrak{g}$ debe, además, satisfacer la condición de que su valor sea del mismo tipo variable que $\mathfrak{a}$. Por último, ρ es la expresión definida por la recursión, depende de tres argumentos y tiene el mismo tipo variable que $\mathfrak{a}$, una vez que se han llevado a cabo las sustituciones correspondientes para $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ y n. Aparte de esto, en $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$ y, en consecuencia, también en ρ pueden aparecer parámetros arbitrarios.

A partir de este esquema general y por sustitución obtenemos recursiones definidas. Así *v.gr.* podemos obtener las recursiones de nuestros ejemplos, considerando a f y a a en el primer caso como parámetros, y representando, en el segundo, el paso de $\varphi_n(a)$ a $\varphi_{n+1}(a)$ como un paso mediado por la función de función $\mathfrak{g}$ de una función φ_n a otra φ_{n+1}, de tal manera que a no se considere nunca un parámetro en la recursión.

Comparada con la recursión elemental, la recursión que hemos utilizado en nuestros dos ejemplos tiene una mayor extensión, pues en un caso hemos introducido un parámetro superior que no es un número entero ordinario, mientras que en el otro hemos elegido para $\mathfrak{a}$ una función y para $\mathfrak{g}$ una función de funciones.

Los tipos variable constituyen un enlace que hace posible establecer una correspondencia entre las funciones de una variable numérica y los números de la segunda clase. De hecho, llegamos a una correspondencia así entre los números de la segunda clase y ciertos tipos de variables cuando comparamos los dos procesos de generación de los números de la segunda clase, esto es, el proceso de añadir una unidad y el del límite de una sucesión numerable, con el modo que incrementan los tipos variable su nivel. Establezcamos una correspondencia entre el proceso de añadir una unidad y el de tomar una función [Funktionen-Nehmen], es decir, la formación de una función que tiene como argumento a un tipo variable dado y la formación de un nuevo tipo variable mediante la unión de una sucesión numerable de tipos variable. Y designemos ahora como *tipos* Z a aquellos tipos variable que correspondan a los números de la segunda clase.

Tenemos así que, además de las operaciones lógicas, en la construcción de los tipos Z se utilizan únicamente las recursiones ordinarias (no transfinitas), precisamente aquellas que resultan necesarias para enumerar una sucesión de tipo como paso preparatorio para el proceso del límite. Una vez que hemos ordenado estos tipos Z de acuerdo con su nivel, tenemos una correspondencia biunívoca en la cual a cada número de la segunda clase, se le asocian los tipos variable de un nivel determinado.

Pero con ello habremos llegado también a una correspondencia biunívoca entre las funciones definidas por medio de los tipos Z y los números de la segunda clase. Para percatarse de esto bastará considerar la siguiente argumentación. Si establecemos los tipos variable únicamente hasta un cierto nivel, construyendo luego las funciones exclusivamente por medio de sustitución y recursión, lo que obtenemos es siempre una totalidad numerable de funciones. Podemos también formalizar de manera estricta esa enumeración. En particular, podemos hacer esto generando, en primer lugar, una función recursiva ρ que abarque todas las recursiones en cuestión y que, en consecuencia, contenga un parámetro que sea mayor que los tipos variable admitidos hasta ese momento. La definición de ρ es una aplicación del esquema general de recursión,

de modo tal que el uso de un tipo de variable superior se convierte en algo esencial.

Lo que entonces hacemos es ordenar de acuerdo con su nivel las especializaciones importantes de los tipos variable que aparecen en ρ, con lo que obtenemos las diferentes sustituciones iniciales. Si colocamos luego a éstas en una sucesión numerable y tomamos como principio de ordenación el número de las sustituciones a realizar, obtendremos finalmente las funciones que queríamos definir.

El esquema de prueba que hemos presentado supone esencialmente la teoría de los números de la segunda clase. Los números de esta clase han sido introducidos simplemente como resultado del proceso continuado de contar más allá del infinito numerable, y hemos caracterizado luego el enunciado constante N, "ser número de la segunda clase" por medio de axiomas.

Sin embargo, esos axiomas proporcionan tan sólo el marco general para una teoría. Una fundamentación más precisa de la misma requiere de una investigación del modo en el que debe formalizarse el proceso continuado de contar más allá del infinito numerable. Esto se logra aplicando ese proceso a una sucesión. La sucesión misma no puede darse sino por medio de una recursión ordinaria y para ésta nuevamente son necesarios ciertos tipos.

Aunque esta situación parece presentar una dificultad importante, en realidad resulta que precisamente gracias a una argumentación de esta índole puede obtenerse de manera mucho más restringida la correspondencia entre los números de la segunda clase y las funciones de una variable numérica.

Los tipos variable que necesitamos para la construcción de los números de la segunda clase pueden obtenerse sustituyendo formalmente en uno o varios lugares de los enunciados de tipo definitorios que tenemos hasta ese momento el signo Z por el signo N. Los tipos variables que resultan de ello se llaman *tipos* N. Es evidente que los tipos Z y los tipos N correspondientes son siempre del mismo nivel.

Por lo demás, no es necesario asignar a un número dado de la segunda clase la totalidad de las funciónes del mismo nivel, sino que ahora es posible establecer una correspondencia recíproca entre los números de la segunda clase y las funciones, de acuerdo con el nivel de los tipos variable necesarios para su definición. En detalle, tal correspondencia se podría caracterizar como sigue.

Si en los tipos Z llegamos únicamente hasta un cierto nivel, el nivel de los tipos N correspondientes se ve también restringido. A partir de los números de la segunda clase construidos con estos tipos podemos obtener, por medio de una sucesión creciente, un número mayor de la segunda clase definido con ayuda de un tipo variable de mayor nivel.

Por otra parte, si tenemos tipos N de hasta un cierto nivel, entonces también las funciones definibles por medio de los tipos Z correspondientes pueden ser enumeradas, a saber, según el número de las sustituciones, tal y como lo hemos descrito anteriormente. Como es bien sabido, con una enumeración $\varphi(a, n)$ de este tipo, podemos llegar, utilizando el método de diagonalización cantoriano, por ejemplo, construyendo $\varphi(a, a) + 1$, a una función distinta a todas las funciones enumeradas y que no puede, en consecuencia, ser definida por medio de los tipos variable anteriormente aceptados.

Con todo ello habríamos hecho posible el establecimiento de una correspondencia biunívoca entre aquellas funciones definibles en el mismo nivel (y cuya totalidad es numerable) y los números de la segunda clase definibles en el nivel correspondiente, pero no en un nivel anterior. De esta manera, toda función resulta asociada con al menos un número de la segunda clase.

Sin embargo, la demostración del teorema del continuo no termina allí, pues requiere de una complementación esencial. Un examen del curso que ha seguido nuestra investigación hace ver que para construir la correspondencia buscada ha sido necesario hacer ciertas suposiciones; éstas tienen un efecto restrictivo en un sentido doble. Por una parte, porque nuestro esquema general de recursión para ρ únicamente representa el caso de la recursión ordinaria, en la que la variable según la cual la recursión avanza es la variable numérica. Por la otra, porque hemos restringido los tipos variable a aquellos que se obtienen por medio del proceso continuado de contar más allá de las sucesiones numeradas.

Es un hecho que las recursiones transfinitas y, en consecuencia, los tipos variable de nivel superior, resultan imprescindibles en la investigación matemática, por ejemplo, para la construcción de funciones de variable real con ciertas propiedades. Pero en relación al problema que nos ocupa, esto es, cuando se trata de construir funciones de una variable numérica, en realidad no necesitamos esas recursiones superiores, ni de los tipos variable de esa especie. Podemos más bien recurrir al siguiente lema.

LEMA II. Para la obtención de funciones de una variable numérica las recursiones transfinitas resultan dispensables. Es decir, la recursión ordinaria, que opera y avanza según una variable numérica, basta no sólo para el proceso de construcción real de las funciones, sino que al mismo tiempo las sustituciones requieren únicamente de tipos variable para cuya definición es suficiente la recursión ordinaria.

Expresado de manera más precisa y acorde a nuestro enfoque finitista, el lema diría lo siguiente. Si para la construcción de una función que tiene como único argumento una variable numérica ordinaria se utiliza una recursión superior o un tipo variable correspondiente, entonces podemos definir siempre a esa función por medio de recursiones ordinarias y utilizando exclusivamente tipos Z.

El siguiente ejemplo podrá aclararnos el sentido y el alcance de nuestro lema.

Supongamos que se ha formalizado la correspondencia de las funciones de un argumento numérico y los números de la segunda clase. Con ello tendríamos también una cierta función $\zeta(a, n)$ que asigna un número ordinario al par formado por un número arbitrario a de la segunda clase numérica y el número ordinario n; $\zeta(a, n)$, con a fija y n variable, representa precisamente la función asociada a a. Sustituyamos ahora a por un número de la segunda clase numérica α_n que depende de n, y consideremos que la sucesión ha sido definida por recursión ordinaria o transfinita, por ejemplo,

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}.$$

Entonces $\zeta(\alpha_n, n)$ es una función de una variable numérica n y nuestro lema II afirmaría que esa función también puede definirse por recursión ordinaria por medio de tipos Z, mientras que una definición de $\zeta(a, n)$ por esos medios es imposible, puesto que la suposición de lo contrario conduce a una contradicción.

Es importante subrayar nuevamente que la exposición que acabamos de presentar no contiene más que las ideas básicas de una demostración del teorema del continuo. La realización completa de las ideas básicas, además de la demostración de los dos lemas, requiere de ciertas reformulaciones cuidadosas en el sentido de las exigencias finitistas.

Intentemos, por último, extraer algunas consecuencias globales de nuestras reflexiones en relación a nuestro problema inicial del infinito.

El infinito no tiene ningún tipo de realidad, no existe en la naturaleza ni es aceptable como fundamento de nuestro pensamiento intelectivo [verstandesmässig]. Es decir, en relación al infinito se da una notable y armónica coincidencia entre el ser y el pensar.

En abierta oposición a los intentos de Frege y Dedekind, podemos concluir que existen ciertas representaciones e ideas intuitivas que resultan imprescindibles como condición de posibilidad de todo conocimiento científico: la lógica no basta. Las operaciones con el infinito necesitan para ser seguras de una base finita.

El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de la razón que supera toda experiencia y por medio del cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad. Pero a la vez, el infinito es una idea en la que podemos confiar sin reservas en el marco de la teoría que acabo de delinear.

Para finalizar, quiero dejar constancia aquí de mi sincero agradecimiento a Paul Bernays por su comprensiva colaboración y por su inestimable ayuda, en particular en lo relativo a la demostración del teorema del continuo.

La fundamentación de la teoría elemental de números

Cuando en la esfera de las matemáticas examinamos las dos fuentes de nuestro conocimiento, es decir, la experiencia y el pensamiento puros, surge una serie de ideas que podrían también resultar de interés para la filosofía. Todas ellas nos remiten a algo común a esas dos fuentes, en sí tan diversas, del conocimiento. Así, por ejemplo, podemos observar la unidad de la sustancia en la materia, aunque, por otra parte, la unidad de los fundamentos se presenta igualmente ante nuestro pensamiento como una exigencia a cumplir y como algo que en muchas ocasiones también logramos satisfacer.

La unidad de las leyes de la naturaleza, que a veces se nos aparece de forma tan sorprendente, puede ser considerada como un ejemplo de ambas fuentes. Sin embargo, un fenómeno aún más notorio que el de esta idea de la unidad es el que podríamos llamar la armonía preestablecida, que pone claramente de manifiesto la existencia de una relación entre la naturaleza y el pensamiento.

El ejemplo más extraordinario y maravilloso de la misma nos lo ofrece la ahora célebre teoría de la relatividad de Einstein. En ella, la exigencia general de los invariantes determina por sí sola, de manera unívoca, las complicadas ecuaciones diferenciales para los potenciales de gravitación. Pero esa determinación no sería posible sin el profundo trabajo de investigación llevado a cabo por Riemann con mucha anterioridad. En realidad, el hecho de que un sistema formal particular tan complejo, con coeficientes numéricos, tenga su origen en una idea general, constituye un caso más bien aislado, inclusive en el análisis matemático.

La teoría de la demostración, que a continuación discutiremos, representa igualmente un ejemplo de armonía preestablecida. Esta teoría

se sirve del llamado cálculo lógico, desarrollado con anterioridad con fines muy diferentes, es decir, para la sola abreviatura y comunicación de enunciados.

Ahora bien, una observación cuidadosa nos conduce a la conclusión de que, aparte de la experiencia y el pensamiento, existe una tercera fuente del conocimiento. Aunque en la actualidad ya no podemos estar de acuerdo con ciertos aspectos del pensamiento de Kant, la idea básica más general de su epistemología conserva, sin embargo, toda su validez: la determinación de las ideas *a priori* y con ello la investigación de las condiciones de posibilidad de todo conocimiento.

Esto es, en mi opinión, lo que en esencia ocurre en mis investigaciones sobre los principios de las matemáticas. En ellas, lo *a priori* es, ni más ni menos, un enfoque fundamental que me gustaría llamar también finitista: hay algo que nos está dado de antemano en la representación, esto es, ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata y previos a todo pensamiento.

Si la inferencia lógica ha de ser algo seguro, es necesario que tengamos una visión global y completa, en todas sus partes, de estos objetos. Su apariencia, su diferenciación, su secuencia y coordinación se nos da con ellos mismos de manera intuitiva e inmediata como algo que ya no es susceptible, ni requiere, de una reducción adicional. Esta es la concepción fundamental que considero necesaria no sólo para las matemáticas, sino también, en general, para todo pensamiento, toda comprensión y comunicación científicos, y sin la cual ninguna actividad del espíritu sería posible. Con ello creo haber distinguido y caracterizado la tercera fuente del conocimiento que se añade a la experiencia y a la lógica.

Las ideas *a priori* son aquellas ideas intuitivas y lógicas que se obtienen en el marco del enfoque finitista. En éste nos percatamos, en particular, de que hay principios que Kant considera *a priori* y que nosotros asignamos a la experiencia, por ejemplo, la totalidad de los hechos fundamentales de la geometría, así como las propiedades elementales del espacio y la materia. Pero existen también, por otra parte, principios que normalmente han sido tenidos como *a priori*, pero que no es posible obtener en el marco de un enfoque finitista, por ejemplo, el principio del tercero excluido y, en general, los llamados enunciados transfinitos.

La aplicación más inmediata y la primera manifestación de los enunciados de este tipo tiene lugar en la teoría de los números. Con ello llegamos al tema central de nuestra conferencia.

Es curioso y filosóficamente significativo que las primeras y más sencillas cuestiones acerca de los números 1 , 2 , 3 ,… presenten dificultades de un nivel tan profundo. Estos problemas deben ser superados. Porque, en efecto, ¿cómo puede ser, en general, posible el conocimiento, si ni siquiera la teoría de los números puede ser fundamentada y si tampoco resulta necesario un consenso total, ni obligatoria la corrección absoluta?

Nos llevaría demasiado lejos, además de que sería superfluo, exponer aquí las múltiples y diferentes estrategias que hoy podemos reconocer como erróneas para la solución de estos problemas. Se ha intentado, por ejemplo, definir a los números de manera puramente lógica, al tiempo que otros han considerado como algo evidente las argumentaciones usuales de la teoría de los números. Ambos enfoques conducen a objeciones contundentes. Sin embargo, existe una vía aún no transitada y mucho más cercana a la práctica matemática que nos puede conducir a nuestra meta. Antes de adentrarnos en su descripción, me gustaría hacer algunas observaciones en relación a los momentos más importantes en la prehistoria de esta problemática.

En 1888, en mi calidad de joven *Privatdozent*, efectúe un viaje de visita a diversas universidades alemanas partiendo de Königsberg. En Berlín, mi primera estación, escuché hablar en todos los círculos matemáticos, tanto entre los jóvenes como entre los viejos colegas, del trabajo entonces recién aparecido de Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, la mayor parte de las ocasiones de manera negativa. Este tratado es, al lado de la investigación de Frege, el intento más importante, por primera ocasión verdaderamente profundo, de dar un fundamento a la teoría elemental de los números. Aproximadamente por las mismas fechas, es decir, hace ya más de una generación, Kronecker formulaba de manera clara, ilustrando sus ideas con numerosos ejemplos, una concepción que coincide en lo esencial con nuestro enfoque finitista.

En aquellos días, para nosotros los jóvenes matemáticos, tanto estudiantes como docentes, se convirtió en una especie de deporte la traducción de las demostraciones efectuadas de manera transfinita a lo finito, siguiendo el modelo de Kronecker. Sin embargo, Kronecker cometió un error al declarar ilícitas las argumentaciones transfinitas y decretar prohibiciones en relación a las mismas. En particular, no sería permisible, de acuerdo con él, concluir que si una afirmación $\mathfrak{A}(n)$ no es válida para todo número entero n, debe existir un número entero para

el que esa afirmación resulte falsa. En aquella época, los matemáticos rechazaron al unísono sus prohibiciones al hacer por completo caso omiso de las mismas.

Ahora bien, ¿qué es lo que realmente ocurre con el uso de las argumentaciones transfinitas?

La teoría de los campos numéricos, por ejemplo, constituye un edificio perfectamenta articulado y altamente desarrollado en su construcción. Se encuentra, además, ligada a las teorías más avanzadas del análisis, esto es, a las teorías de lo que podemos considerar como el más bello, perfecto y elevado de los productos del espíritu humano. En ella, el principio del *tertium non datur* y, en general, las argumentaciones transfinitas del tipo proscrito por Kronecker se utilizan a cada instante.

Todos los paladines del espíritu anteriores y posteriores a Gauss, tanto Hermite como Jacobi y Poincaré, se han servido de la manera más diversa y audaz de este tipo de argumentaciones, y en ningún momento se ha presentado el más leve indicio de discrepancia. Por lo demás, si pensamos en todas sus aplicaciones y tenemos clara la gran cantidad de inferencias transfinitas que tiene lugar, por ejemplo, en la teoría de la relatividad y en la teoría cuántica, y la manera en la que, después de todo, la naturaleza se ajusta a estos resultados: el rayo estelar fijo, el mercurio y los complicados espectros en nuestro planeta y en la lejanía de miles de años luz, podemos con toda razón preguntarnos, ¿hemos de poner en tela de juicio siquiera por un momento nuestro derecho a utilizar la ley del tercero excluido sólo porque Kronecker y algunos filósofos metidos a matemáticos, por causas enteramente arbitarias y ni siquiera formulables de manera precisa lo dicen?

Todo conocimiento científico descansa en una evaluación razonable de la probabilidad, al concitar consenso y oposición. Pensemos, por ejemplo, en la construcción del mundo estelar en la astronomía, o en las leyes de la herencia y las ideas evolucionistas en la biología, todos ellos resultados que hoy consideramos como verdades seguras y comprobadas. Sería el fin de la ciencia y la imposibilidad de cualquier progreso el que ni siquiera admitieramos como verdades las leyes de la aritmética elemental. Y sin embargo, aún en nuestros días hay seguidores de Kronecker que ponen en duda la validez del principio del tercero excluido. Nos enfrentamos aquí, a decir verdad, a la más cruda de las incredulidades surgidas en la historia de la humanidad.

Pero, por otra parte, las matemáticas no pueden apoyarse en la creencia, no importa que tan firme sea ésta, sino que están obligadas a llevar a cabo una elucidación hasta las últimas consecuencias.

Es evidente que el principio del tercero excluido resulta lícito en el caso de un número finito de enunciados. Por lo tanto, toda nuestra atención ha de dirigirse al concepto de "infinito". Yo mismo he llevado a cabo una investigación exhaustiva acerca del infinito[1], de la que aquí sólo puedo presentar la conclusión.

La física enseña que un continuo homogéneo, susceptible de una divisibilidad continuada y que, en consecuencia, realice el infinito en la esfera de lo pequeño no existe en la realidad. La divisibilidad infinita de un continuo es una operación que tiene lugar únicamente en el pensamiento, es decir, se trata de una idea que es contradicha tanto por nuestras observaciones como por las experiencias de la física y la química.

Por otra parte, también en la astronomía se han planteado serias dudas acerca de la existencia de un espacio infinito, es decir, del infinito en la esfera de lo grande. De igual manera, podemos afirmar que toda nuestra acción es finita y que en ella no tiene cabida lo infinito. El infinito no se realiza, entonces, en ninguna parte; no existe en la naturaleza y no resulta tampoco admisible como fundamento de nuestro pensamiento intelectivo.

Y sin embargo, no podemos prescindir de la aplicación incondicionada y general del principio del tercero excluido ni de la negación. Hacerlo significaría la imposibilidad de una construcción unitaria y completa de nuestra disciplina. El manejo del infinito debe ser garantizado, en consecuencia, a partir de lo finito, y esto es precisamente lo que logra mi teoría de la demostración.

Con esta nueva fundamentación de las matemáticas me propongo, en realidad, una meta de gran importancia. Mi intención es eliminar definitivamente como tal el problema de los fundamentos en las matemáticas, convirtiendo a todo enunciado matemático en una fórmula concreta ostensible y estrictamente deducible, y presentando las construcciones conceptuales y las inferencias matemáticas en forma tal que

[1] *Cfr.* Cap.V del presente volumen. [N. de T.]

resulten no sólo irrefutables, sino que nos proporcionen también una imagen de la disciplina en su totalidad[2].

La idea básica de mi teoría de la demostración es la siguiente: todo lo que hasta ahora ha formado parte de las matemáticas es objeto en ella de una formalización rigurosa. De ese modo las matemáticas reales, es decir, las matemáticas en un sentido estricto, se convierten en un conjunto de fórmulas. Estas fórmulas se diferencian de las fórmulas matemáticas corrientes únicamente por el hecho de contener, además de los símbolos lógicos usuales, los símbolos para la implicación ($\rightarrow$) y para la negación ($\overline{\ }$).

Ciertas fórmulas que hacen las veces de fundamento del edificio formal de las matemáticas reciben el nombre de *axiomas*. Una *demostración* es una figura que debe presentarse ante nosotros como algo concreto y que consiste de inferencias. En estas inferencias, cada una de las premisas es o bien un axioma, o coincide con la fórmula final de una inferencia cuyas premisas ya aparecen en la demostración, o bien se obtiene por reemplazo en una fórmula de este tipo o en un axioma.

En lugar de la inferencia concreta, lo que tenemos en la teoría de la demostración es un procedimiento puramente externo de acuerdo con reglas, a saber: la utilización del esquema de inferencia y la sustitución. Decimos, finalmente, que una fórmula es demostrable cuando es o bien un axioma o es la fórmula final de una demostración.

A las matemáticas reales formalizadas de la manera que acabamos de describir se añade un elemento nuevo que podemos considerar como una nueva matemática, una *metamatemática*, que resulta necesaria para asegurar a aquélla, y en la que, a diferencia de los principios deductivos puramente formales de la matemática real, se recurre a la inferencia concreta, pero únicamente con el fin de establecer la consistencia, el carácter no contradictorio de los axiomas.

Los axiomas y los teoremas así obtenidos, es decir, todas las fórmulas que surgen en estas transformaciones, representan imágenes [Abbilder] de los pensamientos y las ideas que dan lugar a los métodos usuales en las matemáticas.

---

[2] En sus *Gesammelte Abbandlungen*, Springer Verlag, vol. 3, Berlin, 1935, pp. 192-195, Hilbert publicó solamente la parte del presente artículo que comienza aquí y que se extiende hasta el punto señalado por la nota 5. [N. de T.]

Por lo demás, el programa que acabamos de describir condiciona ya la elección de los axiomas de nuestra *teoría de la demostración*. En realidad, nuestro procedimiento en todo ello es enteramente análogo al que se observa en la geometría, es decir, dividimos a los axiomas en varios grupos cualitativamente distintos:

I. Axiomas para la implicación

$$A \to (B \to A)$$

(Adición de una suposición);

$$(A \to B) \to \{(B \to C) \to (A \to C)\}$$

(Eliminación de un enunciado);

$$\{A \to (A \to B)\} \to (A \to B)$$

II. Axiomas para la "conjunción" (&) y la "disyunción" (∨)

III. Axiomas para la negación

$$\{A \to (B \,\&\, \bar{B})\} \to \bar{A}$$

(Principio de contradicción);

$$\bar{\bar{A}} \to A$$

(Principio de la doble negación).

Los axiomas de los grupos I, II y III no son, pues, otros que los del cálculo proposicional.

IV. Axiomas de transfinitud

$$(x)A(x) \to A(b)$$

(Axioma aristotélico de inferencia de lo general a lo particular);

El converso de este axioma está dado por el esquema[3]

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \to (x)\,\mathfrak{B}(x)};$$

[3] En donde a no puede aparecer en $\mathfrak{A}$.

$$A(a) \rightarrow (Ex)A(x).$$

Nuevamente, el converso de este último estaría expresado por un esquema. De lo anterior se obtienen, además, otras fórmulas. Por ejemplo,

$$(\overline{x})A(x) \rightleftarrows (Ex)\overline{A}(x)$$

(si un predicado no se aplica a todos los argumentos,
existe un contraejemplo para el mismo, y viceversa);

$$(\overline{Ex})\ A(x) \rightleftarrows (x)\overline{A}(x)$$

(si no hay ningún caso específico de un enunciado,
éste resulta falsa para todos los argumentos, y viceversa).

De esta manera, los axiomas del grupo IV son los axiomas del cálculo de predicados.

A todos ellos se añaden los axiomas matemáticos propiamente dichos.

V. Axiomas de la igualdad

$$a = a;$$

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b));$$

y los

VI. Axiomas numéricos

$$a + 1 \neq 0;$$

además del axioma de la inducción completa y el esquema de recursión.

Agreguemos, por último, que la demostración de consistencia ha sido claramente dada por Ackermann y von Neumann lo que permite mostrar que en la teoría elemental de los números es posible obtener no sólo la consistencia de los axiomas que acabamos de enlistar, sino también que en esta teoría resultan admisibles los principios deductivos transfinitos, en particular, el principio del *tertium non datur*.

De acuerdo con ello, la más importante de nuestras tareas consiste en la demostración de los dos principios siguientes (*Cfr. Math. Ann.*, vol. 102, p. 6.[4]):

1. Una proposición es demostrable cuando se ha establecido que es consistente, esto es, no contradictoria.

2. Si puede establecerse que una cierta proposición $\mathfrak{S}$ es consistente con los axiomas de la teoría de los números, es imposible demostrar que también $\bar{\mathfrak{S}}$ resulta consistente con esos mismos axiomas.

He logrado encontrar ya una prueba de estas afirmaciones, por lo menos en casos muy sencillos. Podemos avanzar considerablemente en esta dirección si a las reglas de inferencia aceptadas (sustitución y esquemas de inferencia) añadimos la siguiente regla, que es también de carácter finitista:

Si ya se ha demostrado que la fórmula

$$\mathfrak{A}(\zeta)$$

resulta siempre una fórmula numérica correcta cuando ζ es una cifra [Ziffer] cualquiera, podemos escribir como fórmula inicial la fórmula

$$(x)\,\mathfrak{A}(x)\,.$$

Esta nueva regla tiene también un carácter finitista.

Por otra parte, debemos recordar aquí que la proposición $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ tiene un alcance mucho mayor que la fórmula $\mathfrak{A}(\zeta)$, donde ζ es una cifra cualquiera. Porque, en el primer caso, en $\mathfrak{A}(x)$ no sólo puede ponerse una cifra arbitraria x, sino también cualquier expresión

---

[4] Hilbert se refiere aquí a su artículo de 1928, ***Probleme der Grundlegung der Mathematik*** [Problemas de la Fundamentación de las Matemáticas], en el que comenta algunos problemas fundamentales abiertos en la teoría de la demostración. Uno de ellos (problema III) es el de probar con medios finitistas la completud del sistema axiomático para la teoría de los números, es decir, el de reformular en términos estrictamente finitistas la demostración usual sobre la existencia de un isomorfismo, de tal manera que con ello quedara igualmente establecido que a) si un cierto enunciado β resulta demostrativamente consistente con los axiomas de esa teoría, la prueba de la consistencia de la negación de β con esos mismos axiomas es imposible, y, además, que b) si un enunciado es consistente con esos axiomas, también es demostrable a partir de ellos. Por supuesto, en otras teorías menos elementales sería posible demostrar la consistencia con un mismo sistema axiomático tanto de un enunciado β como de su negación. De ser así, la elección estaría dictada por las ventajas sistemáticas que en cada caso resulten (principio de la permanencia de las leyes). [N. de T.]

numérica de nuestro formalismo, además de que podemos igualmente formar la negación, de conformidad con el cálculo lógico.

Observemos, en primer lugar, que el sistema axiomático conserva su consistencia cuando le añadimos la nueva regla.

Supongamos ahora que se nos presenta una demostración formal que tiene como fórmula final una contradicción.

La prueba de consistencia consiste en transformar a todas las fórmulas de la demostración en fórmulas numéricas, de acuerdo con un procedimiento determinado, examinándolas después para verificar si son verdaderas [richtig]. Ahora bien, nuestro procedimiento tiene la propiedad de hacer que también las fórmulas que se han obtenido con la nueva regla se transformen en fórmulas numéricas; así, de $(x)\mathfrak{A}(x)$ se obtiene una fórmula $\mathfrak{A}(\zeta)$, donde ζ es una cifra dada. Las presuposiciones de la aplicación de la nueva regla garantizan que $\mathfrak{A}(\zeta)$ es una fórmula verdadera. Nuestro procedimiento transforma nuevamente a todas las fórmulas iniciales de la demostración en fórmulas verdaderas, con lo que queda establecida la prueba de consistencia.

Consideremos ahora una fórmula $\mathfrak{S}$ de la forma

$$(x)\mathfrak{A}(x),$$

en la que no figure ninguna otra variable aparte de x y que sea consistente con nuestros axiomas. Con toda seguridad, $\mathfrak{A}(\zeta)$ es verdadera, con tal de que ζ sea una cifra. De no ser así, $\overline{\mathfrak{A}}(\zeta)$ tendría que ser verdadera y, por lo tanto, demostrable. Pero esto contradice $(x)\mathfrak{A}(x)$ y resulta incompatible con nuestra suposición. Hemos establecido así, de acuerdo con nuestra nueva regla de inferencia, la fórmula $\mathfrak{S}$. En consecuencia, el principio 1 resulta válido para cualquier enunciado $\mathfrak{S}$ de la forma $(x)\mathfrak{A}(x)$ en la que aparte de x no figure ninguna otra variable.

Precisamente para estos enunciados del tipo de $\mathfrak{S}$ se sigue también, a partir de la proposición 1 que acabamos de establecer, la validez de la proposición 2.

Por otra parte, es evidente que si partimos de una afirmación $\mathfrak{T}$ de la forma

$$\mathfrak{T}:(Ex)\mathfrak{A}(x),$$

su negación

$$\overline{\mathfrak{T}}:(x)\overline{\mathfrak{A}}(x),$$

es de la forma de $\mathfrak{S}$ anteriormente considerada.

De acuerdo con el principio 2, es imposible ofrecer una prueba de la consistencia de las dos afirmaciones $\mathfrak{T}$ y $\overline{\mathfrak{T}}$. Por lo tanto, si suponemos que contamos ya con una prueba de la consistencia de $\mathfrak{T}$, la demostración correspondiente para $\overline{\mathfrak{T}}$ no puede darse, con lo que también el principio 2 queda establecido para cualquier afirmación de la forma $\mathfrak{T}$. Sin embargo, es claro que a partir de ello no puede todavía concluirse que $\mathfrak{T}$ sea también demostrable[5].

A la teoría de la demostración se le ha hecho una serie de objeciones de muy diversa índole. Sin embargo, todas ellas carecen de fundamento por lo que es conveniente observar lo siguiente.

1. Los críticos de mi teoría deben también señalar con precisión el sitio en el que en mi demostración se comete un error; de otro modo, me resulta imposible examinar su argumentación.

2. Se ha dicho acerca de mi teoría que aunque las proposiciones resultan ciertamente consistentes, esto no basta para considerarlas demostradas. Por supuesto que son demostables, como yo mismo lo he mostrado aquí en casos sencillos. En general, y tal y como yo esperaba desde un principio, resulta que el establecimiento de la consistencia constituye el objetivo esencial de la teoría de la demostración y, asimismo, que la cuestión de la demostrabilidad también puede resolverse con una ocasional y adecuada extensión de las determinaciones, preservando en cada caso el carácter finito de nuestras argumentaciones. Pero lo que no puede hacerse es exigir que una teoría resuelva de inmediato y por completo todos los problemas importantes que se le plantean; es suficiente tan sólo que muestre la vía para hacerlo.

3. Los críticos de mi teoría deben entender sus conceptos, por ejemplo, el de "consistencia", con el uso que yo les doy, no como otros autores los definen. En consecuencia, mi interpretación en lo que respecta a este punto es decisiva, pues es la única que se considera en la teoría.

4. A veces, las objeciones que se hacen a mi teoría se refieren a aspectos secundarios y carentes por completo de importancia para sus resultados. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando se critica el uso que hago del término "ideal", un uso que, por lo demás y a pesar de lo que se diga, considero extremadamente adecuado y útil para el en-

[5] Ver nota 4. [N. de T.]

tendimiento. Pero han sido también frecuentes las opiniones prejuiciadas y unilaterales y los lugares comúnes. En otros artículos me he ocupado ya de las objeciones acerca del formalismo[6]. Las fórmulas constituyen un instrumento indispensable para la investigación lógica. Por supuesto, su uso requiere de un trabajo intelectual preciso, haciendo imposible al mismo tiempo la palabrería vacua.

5. Hasta ahora no ha habido ninguna otra teoría que permita obtener los mismos resultados. Más aún, estoy convencido de que no es, en realidad, concebible ninguna otra teoría que lo logre, puesto que lo que hace la teoría de la demostración no es sino representar la actividad última de nuestro entendimiento, elaborando un registro de las reglas según las cuales procede, de hecho, nuestro pensamiento.

Pensar ocurre de manera paralela a hablar y escribir; esto es, por medio de la construcción y coordinación de enunciados. Para llevar a cabo una fundamentación no necesitamos, en consecuencia, de Dios, como Kronecker, ni de la suposición de una capacidad especial de nuestro entendimiento acorde al principio de inducción completa, como Poincaré, ni de una intuición originaria, como Brouwer, ni tampoco, finalmente, de un axioma de infinitud o de un axioma de reducibilidad, como Russell y Whitehead; suposiciones todas ellas realmente concretas [inhaltlich] y no compensables por medio de pruebas de consistencia, de las que las de estos dos últimos autores no son ni siquiera plausibles.

En un escrito filosófico reciente encontramos la siguiente proposición:

"La Nada es la negación pura de la totalidad del Ser"[7].

Esta proposición resulta sumamente instructiva porque, a pesar de su brevedad, ilustra todas las violaciones de los principios expuestos en la teoría de la demostración. Conceptos como "la totalidad del Ser" encierran en sí una contradicción y ponen en peligro el sentido de cualquier afirmación. Pero aparte de ello, en este caso se aplica al problemático concepto de la totalidad del Ser la negación. Una de las tareas más importantes de la teoría de la demostración es la clarificación del sentido y admisibilidad de la negación.

---

[6] *Cfr.* El Cap. III del presente volumen. [N. de T.]

[7] *Cfr.* M. Heidegger, *Sein und Zeit*, §58. [N. de T.]

La negación es un proceso formal por medio del cual, a partir de un enunciado $\mathfrak{S}$, resulta otro que se encuentra ligado a $\mathfrak{S}$, por los axiomas de la negación anteriormente mencionados, es decir, por el *principium contradictionis* y el el principio del *tertium non datur*. El proceso de negación constituye un instrumento teórico imprescindible para la investigación. Su aplicación incondicionada es la que hace posible la completud y el carácter cerrado de la lógica. Sin embargo, los enunciados obtenidos por medio de la negación representan, en general, un ideal, por lo que querer tomar a esos enunciados ideales como algo en sí mismo real significaría ignorar tanto a la naturaleza como a la esencia del pensamiento.

Estoy convencido de haber logrado lo que me había propuesto y había adelantado en relación a la teoría de la demostración: la eliminación definitiva del problema de los fundamentos de las matemáticas como tal.

Con toda seguridad resultará de interés para los filósofos que haya una disciplina como las matemáticas. Nuestra tarea como matemáticos consiste en cuidar a nuestra disciplina como si se tratara de un santuario, para que en el futuro *todo* conocimiento humano pueda participar también de la misma precisión y claridad. No tengo la menor duda de que ese momento ha de llegar ni de que lo que digo ha de ocurrir.